

Fejezzük ki az a, b, c oldalú háromszög területét először ϱ -val és a félkerülettel, majd két oldal s a közbezárt szög segítségével:

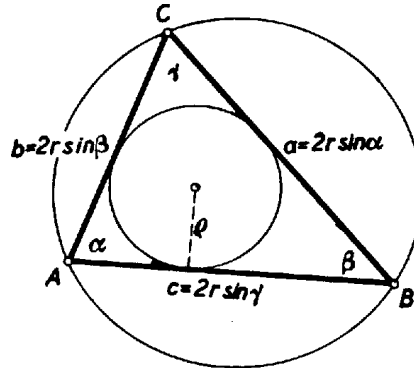
$$T = \varrho \frac{a+b+c}{2} = \frac{bc \sin \alpha}{2}.$$

Ebből

$$\varrho = \frac{bc \sin \alpha}{a+b+c}.$$

Ismeretes, hogy az oldalak a szögek és a körülírt kör sugarának segítségével a következőképpen fejezhetők ki:

$$a = 2r \sin \alpha, \quad b = 2r \sin \beta, \quad c = 2r \sin \gamma.$$



Ezt a ϱ -ra kapott képletbe helyettesítve és $2r$ -rel egyszerűsítve :

$$(1) \quad \varrho = \frac{2r \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}.$$

A feladat szövegében adott értékek fölhasználásával számítsuk ki a szereplő sinusokat (mivel $\alpha < 180^\circ$, $\sin \alpha$ -ra elég a pozitív értéket venni) :

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1}} + \frac{1}{\sqrt{9+1}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

$\sin \gamma = [180^\circ - (\alpha + \beta)] = \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$, ezt $\sin \beta$ -val végigszorozva és $\sin \beta \sin \gamma$ értékét behelyettesítve :

$$\frac{1}{\sqrt{10}} = \sin \beta (\sin \alpha \cos \beta + \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \sin \beta) = \frac{1}{\sqrt{10}} \sin \beta \cos \beta + \frac{3}{\sqrt{10}} \sin^2 \beta.$$

($\cos \alpha$ -t $\sin \alpha$ -val kifejezve, elegendő volt a pozitív gyököket venni, hiszen $\operatorname{tg} \alpha$ pozitív, s így $\alpha < 90^\circ$.)

Szorozunk végig $\sqrt{10}$ -zel, fejezzük ki $\cos \beta$ -t $\sin \beta$ -val. Az így kapott egyenletet négyzetre emelve kapjuk, hogy

$$\sin^2 \beta (1 - \sin^2 \beta) = 1 - \sin^2 \beta + 9 \sin^4 \beta,$$

azaz a zárójelet felbontva és rendezve :

$$10 \sin^4 \beta - 7 \sin^2 \beta + 1 = 0.$$

Ebből

$$\sin^2 \beta_1 = \frac{1}{2} \quad \text{és} \quad \sin^2 \beta_2 = \frac{1}{5}.$$

$\sin \beta$ -ra csak a pozitív értéket kell vennünk :

$$\sin \beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin \beta_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

A megadott $\sin \beta \sin \gamma = \frac{1}{\sqrt{10}}$ összefüggésből

$$\sin \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Mivel ϱ -nak az (1) alatt kifejezett értékében $\sin \beta$ és $\sin \gamma$ fölcserélhetők, elég csak az egyik kapott értékpárt behelyettesíteni. Így a kiszámított szögfüggvény-értékek fölhasználásával:

$$\varrho = 2r \frac{\frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{10}}{(1 + \sqrt{2} + \sqrt{5})5} r (\sim 0,136r).$$