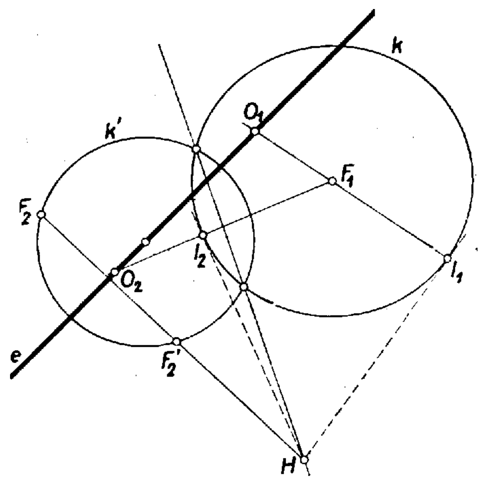
I. megoldás: A hiperbolát tekinthetjük úgy is, mint azon körök középpontjainak mértani helyét, amelyek átmennek az egyik (pl. az F_2) gyújtóponton s érintik a másik gyújtópont (F_1) körül rajzolt $2a$ sugarú k kört (az ún. vezérkört vagy iránykört). E körök közül keressük azokat, melyeknek középpontja az adott e egyenesen van. Mivel az e egyenes egy ilyen körnek átmérője, a keresett kör nemcsak az F_2 fókuszon, hanem a fókusz e-re való tükörképén, F_2'-n is átmegy. Az e egyenes és a hiperbola metszéspontjainak megkeresése tehát olyan körök középpontjainak a megszerkesztését jelenti, amelyek átmennek két ponton, F_2-n és F_2'-n, azonkívül érintik az F_1 középpontú k iránykört. Ezt a következőképpen végezhetjük el.

A megszerkesztendő kör és a k iránykör hatványvonala a közös érintő, ennek pontjaiból ugyanolyan nagyságú érintőszakasz húzható mindkét körhöz. Mivel az F_2-n és F_2'-n átmenő körsor F_2F_2' hatványvonalának (F_2F_2' a kívüli) pontjaiból a körsor minden eleméhez ugyanakkora nagyságú érintő húzható, így a közös érintő s az F_2F_2' egyenes H metszéspontja olyan pont lesz, amelyből az iránykörhöz és az F_2 és F_2' pontokon átmenő körökhöz is azonos nagyságú érintő húzható. Így e körök bármelyikének és k-nak a hatványvonala is átmegy H-n. Ennek alapján a H pont megszerkesztése úgy történhet, hogy megrajzoljuk a körsor egy tetszőleges k'-körét, pl. olyant, amely metszi az iránykört (1. ábra).



1. ábra

A kapott metszéspontokat összekötő hatványvonal és az F_2F_2' hatványvonal metszéspontja lesz H. Innen az iránykörhöz húzható érintők I_1 és I_2 érintési pontjai a keresett hiperbolapontok (az O_1 és O_2 körközéppontok) ún. iránypontjai, s mint ismeretes, az e egyenesen levő O_1 és O_2 pontokat az I_1F_1 és I_2F_2 egyenesek metszik ki.

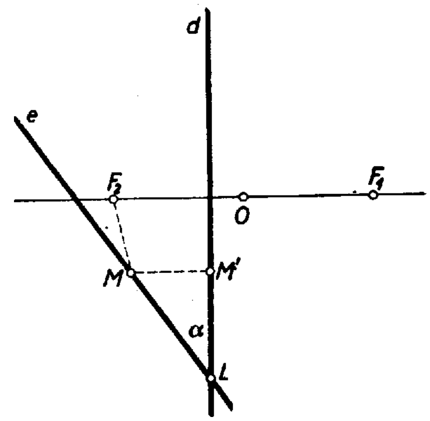
Ezzel a hiperbola és egyenes O_1 és O_2 metszéspontjait megszerkesztettük.

Ha az e egyenes átmegy az F_1 fókuszon, akkor az F_2F_2' egyenes s a k' és k kör hatványvonalai nem metszik egymást. Ilyenkor az F_2-ben megrajzolt iránykörrel kell megoldanunk a feladatot. – Ha pedig mindkét fókuszon átmegy az e egyenes, akkor a hiperbola csúcspontjait kell megszerkesztenünk: ezek az F_1F_2 szakasz felezőpontjától a távolságnyira vannak az e egyenesen.

A feladatnak 2, 1 vagy 0 megoldása lehetséges. Ha a gyújtópontnak az egyenesre vonatkozó tükörképe az iránykörön kívül fekszik, két metszéspont van, ha rajta, akkor csak egy s az egyenes érintő. Ha pedig a tükörkép az iránykörnek belső pontja, akkor nincs metszéspont, mert hiszen nem létezik olyan kör, amely érinti az iránykört s egyszerre átmegy egy külső és egy belső pontján.

Makay Attila (Bp. IX., Fáy g. IV. o. t.)

II. megoldás: A hiperbola olyan pontok mértani helyének is tekinthető, amelyeknek egy ponttól (az egyik fókusztól) és egy egyenestől (a fókuszhoz tartozó vezéregyenestől) mért távolságai aránya állandó $\frac{c}{a}$ érték (a a fél valós tengely hossza, c a fókuszok távolsága a középponttól).



2. ábra

A 2. ábrán megrajzoltuk a hiperbola F_2 fókuszhoz tartozó vezéregyenesét. (Ennek megszerkesztése történhet annak felhasználásával, hogy a vezéregyenesnek a középponttól való távolsága $t = \frac{a^2}{c}$: tehát megszerkeszthető pl. a $t : a = a : c$ aránypár megoldásaként). Legyen az e és d egyenesek metszéspontja L, egymással bezárt szögük α, a hiperbolának e-vel való metszéspontja M, ennek merőleges vetülete a vezéregyenesen M'.

A kapott derékszögű háromszögből

$$\frac{MM'}{ML} = \sin\alpha,$$

a vezéregyenes definíciójából:

$$\frac{F_2M}{MM'} = \frac{c}{a}.$$

A kettőt összeszorozva:

$$\frac{F_2M}{ML} = \frac{c}{a}\sin\alpha.$$

Az M pont L-től és F_2-töl mért távolságainak aránya tehát állandó. Ez azt jelenti, hogy az M rajta van az F_2 és L pontokhoz tartozó, $\frac{c}{a}\sin\alpha$ arányú a Apollonius-körön. A kör megrajzolásával M-et meg tudjuk szerkeszteni.

2, 1 vagy 0 a megoldások száma, aszerint, hogy az Apollonius-kör metszi, érinti vagy nem metszi az e egyenest.

Szász Domokos (Bp. V., Eötvös g. III. o. t.)

Megjegyzések: 1. A feladat megoldása történhet még körre való inverzióval, vagy ábrázoló geometriai úton, kúp és egyenes metszéspontjainak meghatározásával.

2. A feladatban felhasználtak (a hiperbola mint kétféle mértani hely, vezéregyenes, körsorok, hatványvonal stb.) megtalálhatók a *Kúpszeletek* c. szakköri füzetben, a megfelelő fejezetekben.