

I. megoldás: Az adott egyenlet akkor lesz egyenespár egyenlete, ha y -t mint x függvényét kifejezve belőle, y -ra két elsőfokú egyenletet kapunk. Rendezzük tehát az egyenletet y hatványai szerint és oldjuk meg:

$$y^2 + 2y(2x - 1) + x(\lambda x - 4) - 3 = 0,$$

ebből

$$y = \frac{-2(2x - 1) \pm \sqrt{4(2x - 1)^2 - 4x(\lambda x - 4) + 12}}{2}$$

$$= 1 - 2x \pm \sqrt{(4 - \lambda)x^2 + 4}.$$

A kapott egyenlet csak akkor lesz x -ben is elsőfokú, ha a gyökjel alatt álló kifejezésben x^2 együtthatója 0 (hiszen a gyökalatti kéttagú kifejezést nem alakíthatjuk teljes négyzetté).

A megadott egyenlet tehát a $\lambda = 4$ érték mellett jelent egyenespárt, az y -ra kapott kifejezésből a két egyenes egyenlete

$$y = -2x + 3 \quad \text{és} \quad y = -2x - 1.$$

Katona Gyula (Bp. VIII., Kandó híradásip. t. III. o. t.)

II. megoldás: A két egyenesből álló „egyenespár” (másszóval degenerált, elfajult kúpszelet) egyenlete az egyenesek egyenletének összeszorzásával állítható elő. A szóbanforgó egyenespár egyik egyenesének egyenlete sem lehet $x = a$ (konstans) alakú, hiszen ezt az egyenletet egy másik, x -ben, y -ban elsőfokú egyenlettel összeszorozva y^2 -es tagot nem kaphatunk. A két egyenes egyenlete tehát $y = m_1x + b_1$, illetőleg $y = m_2x + b_2$ alakban írható. A két egyenesből alkotott degenerált kúpszelet egyenlete (a 0-ra rendezett alakok összeszorzásával):

$$(y - m_1x - b_1)(y - m_2x - b_2) =$$

$$= m_1m_2x^2 - (m_1 + m_2)xy + y^2 + (m_1b_2 + m_2b_1)x - (b_1 + b_2)y + b_1b_2 = 0.$$

Az adott és a most kapott egyenlet együtthatóinak összehasonlításából a következő egyenletekhez juthatunk:

$$\begin{aligned} m_1 \cdot m_2 &= \lambda, & -(b_1 + b_2) &= -2, \\ -(m_1 + m_2) &= 4, & b_1b_2 &= -3, \\ m_1b_2 + m_2b_1 &= -4. \end{aligned}$$

A kapott egyenletrendszerből az ismeretlenek kiszámíthatók. Az utolsó két egyenlet alapján b_1 és b_2 az $x^2 - 2x - 3 = 0$ egyenlet két gyökeként adódik: $b_1 = 3$, $b_2 = -1$. Ezeket felhasználva a második és harmadik egyenletből $m_1 = m_2 = -2$. Ebből $\lambda = m_1m_2 = 4$.

Az adott egyenlet tehát $\lambda = 4$ érték mellett lesz egyenespár egyenlete. m_1 , m_2 , b_1 , b_2 ismeretében az egyenesek egyenletének összeszorzásával $[(y + 2x - 3) \cdot (y + 2x + 1) = 0]$ ellenőrizhetjük, hogy a feladat megoldása valóban helyes eredményre vezetett.

Bender Cecilia (Bp. I., Szilágyi lg. III. o. t.)