

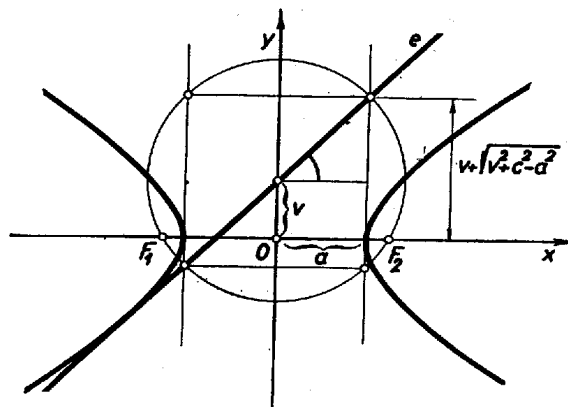
I. megoldás: Feladatunkat koordináta-geometria segítségével oldjuk meg.
Legyen a kúpszelet középponti helyzetű, akkor az egyenlete:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

(Az egyenlet $a < c$ esetén hiperbola, $a > c$ esetén ellipszis, $c = 0$ esetén pedig kör egyenlete. Kör esetén a fókuszok egy pontba, a kör középpontjába esnek.)

A $(c, 0)$ és a $(-c, 0)$ fókuszokon átmenő kör (1. ábra) középpontja az Y tengelyen van, legyenek koordinátái $(0; v)$, így egyenlete:

$$x^2 + (y - v)^2 = v^2 + c^2.$$



1. ábra

A csúcsérintők a kört a $\pm a$ abszcisszájú, az egyenletből kiszámíthatóan $v \pm \sqrt{v^2 + c^2 - a^2}$ ordinátájú pontban metszik. (Ellipszisenél csak akkor van 4 metszéspont, ha $v^2 + c^2 > a^2$, vagyis a kör sugara nagyobb a nagytengely felénél.) A téglalapátlók az Y tengelyt a $(0; v)$ pontban metszik és iránytangensük (l. az 1. ábrát) $\pm \frac{\sqrt{v^2 + c^2 - a^2}}{a}$, az egyik átló egyenlete tehát

$$y = \frac{\sqrt{v^2 + c^2 - a^2}}{a}x + v.$$

Ezt a kúpszelet egyenletébe helyettesítve:

$$x^2(a^2 - c^2) + \left(\frac{\sqrt{v^2 + c^2 - a^2}}{a}x + v \right)^2 a^2 - a^2(a^2 - c^2) = 0.$$

Ebből x -re a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$$v^2x^2 + 2av\sqrt{v^2 + c^2 - a^2}x + a^2v^2 - a^2(a^2 - c^2) = 0.$$

Az egyenlet diszkriminánsa

$$4a^2v^2(v^2 + c^2 - a^2) - 4v^2(a^2v^2 - a^4 + a^2c^2) = 0.$$

A kúpszeletnek és az egyenesnek tehát csak egy közös pontja van, vagyis az átló egyben érintő is.

Ugyanígy igazolható állításunk a másik átlóra is (illetőleg a kúpszeletnek és a két átlónak az Y tengelyre való szimmetriájából ez már következik is).

A körre fajuló ellipszis esetét belevettük a tárgyalásba. Ezzel tehát az összes lehetséges esetet kimerítettük.

Pásztor Erzsébet (Makó, József A. g. III. o. t.)

II. megoldás: Ismeretes a hiperbolára és ellipsziszre érvényes következő tétel: az egyik fókuszpontnak bármely érintőre vonatkozó tükörképe rajt van a másik fókuszról rajzolt, $2a$ sugarú, ún. vezérkörön; és fordítva: az egyik fókusz és a másiktól rajzolt vezérkör egy pontja által alkotott szakasz felezőmerőlegese érinti a kúpszeletet. Feladatunk bizonyítására az említett megfordítást fogjuk felhasználni.

Legyenek a csúcsérintők által meghatározott téglalap átlói MK , ill. LN (2. ábra).

