I. megoldás: A feladatot koordináta-geometria segítségével oldjuk meg. Legyen az adott r sugarú kör O középpontja a koordinátarendszer kezdőpontja, az adott egyenes pedig az X tengely. Az adott P pont koordinátái legyenek $(u,\, v)$, a körön levő Q ponté $(x_1,\, y_1)$, akkor Q pont vetületének, Q'-nek koordinátái $(x_1, 0)$. Mivel Q rajta van a körön, kielégíti az egyenletét:

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2, \tag{1}$$

s mivel $PQ' = QQ'$, így

$$(u - x_1)^2 + v^2 = y_1^2. \tag{2}$$

(1)-ből y_1^2-et kifejezve és (2)-be helyettesítve rendezzük, majd oldjuk meg az x_1-re kapott másodfokú egyenletet:

$$u^2 - 2ux_1 + x_1^2 + v^2 = r^2 - x_1^2,$$
$$2x_1^2 - 2ux_1 + u^2 + v^2 - r^2 = 0,$$
$$x_1 = \frac{2u \pm \sqrt{4u^2 - 8(u^2 + v^2 - r^2)}}{4} = \frac{u}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{2r^2 - 2v^2 + u^2}.$$

Az x_1 távolság (és segítségével Q pont) ebből már megszerkeszthető a Pythagoras-tétel segítségével.

A feladat megoldható, ha az x_1-re kapott kifejezésben a gyök alatti kifejezés nem negatív:

$$2r^2 - 2v^2 - u^2 \geq 0,$$

vagyis $-\,2r^2$-tel osztva

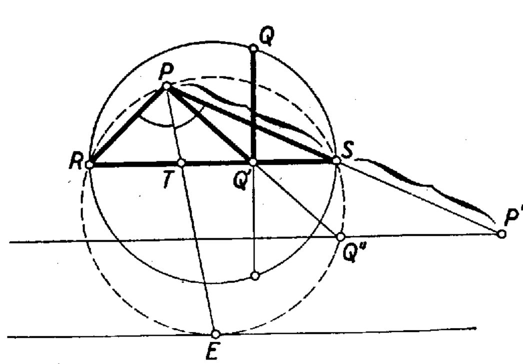
$$\frac{u^2}{2r^2} + \frac{v^2}{r^2} \leq 1.$$

Ebből kiolvasható, hogy azok az $(u,\, v)$ koordinátájú pontok, melyeknél a szerkesztés elvégezhető, egy olyan középponti helyzetű, koordináta tengelyekkel egybeeső tengelyű ellipszis kerületén és belsejében helyezkednek el, melynek fél nagytengelye $r\sqrt{2}$, fél kistengelye pedig r.

A megoldások száma x_1-re 2, 1 vagy 0, aszerint, hogy az x_1-re kapott másodfokú egyenlet diszkriminánsa pozitív, nulla vagy negatív, tehát aszerint, hogy P az ellipszis belsejében, kerületén vagy kívüle helyezkedik el. Egy x_1-hez két y_1 érték tartozik, tehát a P ponthoz szerkeszthető Q pontok száma 4, 2 vagy 0 (egy-egy tükrös az X tengelyre).

Horváth Miklós (Kaposvár, Táncsics g. III. o. t.)

II. megoldás: Tekintsük a feladatot megoldottnak (l. az ábrát).



Az SQR derékszögű háromszögben a QQ' magasság mértani közepe az átfogón létesített szeleteknek:

$$(QQ')^2 = RQ' \cdot Q'S.$$

Mivel a feladat szerint $PQ' = QQ'$, ezért

$$(PQ')^2 = RQ' \cdot Q'S. \tag{1}$$

Rajzoljunk $PRS_\triangle$ köré kört. (Ez mindig megtehető, ha P, R, S háromszöget határoznak meg; ha viszont P az RS átmérőn van rajt, a Q pont szerkesztése egyszerű, hiszen akkor P, Q', Q 45°-os, egyenlő szárú derékszögű háromszöget határoznak meg.) A PQ' egyenes messe ezt a kört a Q'' pontban. A húrok szeleteire vonatkozó tétel szerint:

$$RQ' \cdot Q'S = PQ' \cdot Q'Q''.$$

Ezt (1)-gyel összehasonlítva látható, hogy

$$Q'Q'' = PQ'.$$

Ennek alapján a szerkesztés a következő. Először a PRS háromszög köré írt körön a Q''-t szerkesztjük meg pl. úgy, hogy a PS szakasz meghosszabbítására S-ből fölmérjük a PS távolságot, a kapott pontból az RS oldallal húzott párhuzamos kimetszi a Q'' pontot. Ezt P-vel összekötve az RS átmérőn megszerkesztettük a Q' pontot. Az abban emelt merőleges metszi ki a körből a Q gyanánt megfelelő pontokat.

A szerkesztés helyességét az előbbi gondolatmenet megfordításával igazolhatjuk.

Egy P ponthoz négy megoldást kapunk, ha az RS-sel párhuzamos egyenes két pontban metszi a kört, kettőt, ha érinti (hiszen egy megoldásként kapott Q ponttal együtt az RS átmérőre való tükörképe is megoldása a feladatnak). Nincs megoldás, ha nem metszi.

Vizsgáljuk meg, milyen P pontokra van megoldása a feladatnak. Megoldást akkor kapunk, ha az RS-sel húzott párhuzamos legalább érinti a kört. Mivel az RS-sel párhuzamos érintő E érintési pontja az $RPS\sphericalangle$ szögfelezőjének a körrel való metszéspontja, így a párhuzamos olyan P pont esetén érint, amelyre $PT = TE$. Ennélfogva a feladat megoldható, ha $PT \leq TE$. Viszont egy húr szeleteinek szorzatára ismert tétel szerint $PT \cdot TE = RT \cdot TS$, így a megoldhatóság feltétele:

$$PT^2 \leq RT \cdot TS.$$

A 698. feladatban (KML XII., 3. sz. 78–81. o.) bebizonyítottuk a háromszög szögfelezőjére vonatkozó következő egyenlőséget: a háromszög egy csúcsából húzott szögfelezőjének négyzete egyenlő a csúcsban találkozó oldalak szorzatának és a szemközti oldalon létesített szeletek szorzatának különbségével. Így a megoldhatóságra kapott feltétel a következő lesz:

$$PT^2 = PR \cdot PS - RT \cdot TS \leq RT \cdot TS,$$

átrendezve:

$$\frac{PR}{RT} \cdot \frac{PS}{TS} \leq 2.$$

Mivel PT szögfelező, azért

$$\frac{PR}{RT} = \frac{PS}{TS} = \frac{PR + PS}{RS}.$$

A kapott feltétel így írható:

$$\left(\frac{PR + PS}{RS}\right)^2 \leq 2,$$

vagyis

$$PR + PS \leq RS \cdot \sqrt{2}.$$

Eszerint olyan P pontok esetén van megoldása a feladatnak, melyek távolságainak összege R-től és S-től nem nagyobb az $RS \cdot \sqrt{2}$ állandó értéknél. A feltételnek az R és S fókuszú, $\frac{RS}{2}\sqrt{2}$ fél nagytengelyű, $\sqrt{\frac{RS^2}{2} - \frac{RS^2}{4}} = \frac{RS}{2}$ fél kistengelyű ellipszis kerületi és belső pontjai tesznek eleget. Ugyanarra az eredményre jutottunk tehát, mint az I. megoldásban.

Németh József (Esztergom, Ferences g. III. o. t.)