

I. megoldás: Fel kell tennünk, hogy a szereplő törtek közül egyiknek a nevezője sem 0, hiszen akkor a feladatnak nincs értelme. Jelöljük a két egymással egyenlő tört értékét t -vel és alakítsuk át őket:

$$(1) \quad \frac{ac - b^2}{a - 2b + c} = \frac{ac - bc + bc - b^2}{a - b - b + c} = \frac{c(a - b) - b(b - c)}{(a - b) - (b - c)} = t,$$

$$(2) \quad \frac{bd - c^2}{b - 2c + d} = \frac{bd - cd + cd - c^2}{b - c - c + d} = \frac{d(b - c) - c(c - d)}{(b - c) - (c - d)} = t.$$

(1)-ből a nevezővel végigszorozva:

$$c(a - b) - b(b - c) = t(a - b) - t(b - c),$$

vagyis

$$(3) \quad (c - t)(a - b) = (b - t)(b - c).$$

(2)-ből hasonlóképpen

$$(4) \quad (d - t)(b - c) = (c - t)(c - d).$$

Szorozzuk össze (3)-at és (4)-et:

$$(c - t)(a - b)(d - t)(b - c) = (b - t)(b - c)(c - t)(c - d).$$

Egyszerűsíthetünk $(b - c)$ -vel, hiszen $b \neq c$. De egyszerűsíthetünk $(c - t)$ -vel is, mert ha $c - t = 0$ volna, akkor (3)-ból $b - t$ szintén nulla volna, e kettőből pedig $b = c$ következne. Tehát:

$$(a - b)(d - t) = (b - t)(c - d).$$

Ebből kifejezhetjük a két tört közös értékét, hiszen $a - b - c + d$ a megoldás elején tett megkötés miatt nem 0:

$$\begin{aligned} d(a - b) - t(a - b) &= b(c - d) - t(c - d), \\ t &= \frac{d(a - b) - b(c - d)}{(a - b) - (c - d)} = \frac{ad - bc}{a - b - c + d}. \end{aligned}$$

Ezzel igazoltuk a feladat állítását.

Megyesi László (Makó, József A. g. III. o. t.)

II. megoldás: Fel kell tennünk, hogy a két tört nevezője nem 0. Ekkor a nevezők szorzatával átszorozva az egyenlőséget és 0-ra redukálva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 0 &= abc - b^3 - 2ac^2 + 2b^2c + acd - b^2d - abd + ac^2 + 2b^2d - 2bc^2 - bcd + c^3 = \\ &= abc - b^3 - ac^2 + 2b^2c + acd + b^2d - abd - 2bc^2 - bcd + c^3 = \\ &= abc - ac^2 - b^3 + b^2c + b^2c - bc^2 + acd - abd + b^2d - bcd - bc^2 + c^3 = \\ &= (b - c)(ac - b^2 + bc - ad + bd - c^2). \end{aligned}$$

Mivel feltétel szerint $b \neq c$, így a nyert összefüggésből

$$ac - b^2 + bd - c^2 = ad - bc,$$

vagyis a két egyenlő tört számlálójának összege a harmadik tört számlálóját adja. De hasonló érvényes a nevezőre is:

$$a - 2b + c + b - 2c + d = a - b - c + d.$$

Általában, ha három törtre: $\frac{h}{i}, \frac{j}{k}, \frac{l}{m}$ -re

$$\frac{h}{i} = \frac{j}{k}, \quad h + j = l \quad \text{és} \quad i + k = m \neq 0,$$

akkor

$$\frac{l}{m} = \frac{h}{i} = \frac{j}{k}.$$

Ha ugyanis $h \neq 0$, akkor az első egyenlőtlenégből $\frac{k}{i} = \frac{j}{h}$. Ezt az arányt α -val jelölve $j = \alpha h$, $k = \alpha i$, így

$$l = h + j = (1 + \alpha)h, \quad m = i + k = (1 + \alpha)i \quad (\neq 0)$$

tehát $1 + \alpha \neq 0$ és így

$$\frac{l}{m} = \frac{(1 + \alpha)h}{(1 + \alpha)i} = \frac{h}{i} = \frac{j}{k}.$$

Ezzel igazoltuk állításunkat. Ebből speciálisan adódik a feladat állítása is.