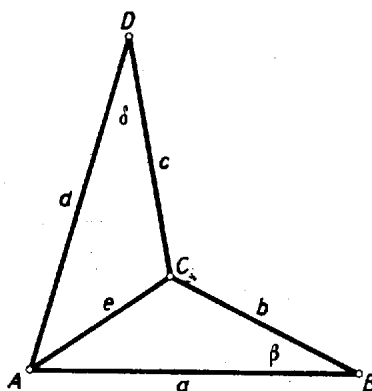


Minden négyszög területe (akár konvex, akár konkáv) legalább az egyik átlóval két háromszög területének összegére bontható. Tegyük fel, hogy $AC = e$ egy ilyen átló. A betűzést az ábra mutatja.



A négyszög területe

$$(1) \quad t = \frac{1}{2}ab \sin \beta + \frac{1}{2}cd \sin \delta,$$

ahol $\beta < 180^\circ$, és $\delta < 180^\circ$.

Az $AC = e$ átló négyzetét mindkét háromszögből a cosinus-tétellel kifejezve

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta = c^2 + d^2 - 2cd \cos \delta,$$

vagyis

$$(2) \quad a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2ab \cos \beta - 2cd \cos \delta.$$

(1) négyszeresének négyzetéhez hozzáadva a (2) négyzetét:

$$16t^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = (2ab \sin \beta + 2cd \sin \delta)^2 + (2ab \cos \beta - 2cd \cos \delta)^2$$

A jobb oldalt tagokra bontva és figyelembe véve, hogy $\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = \sin^2 \delta + \cos^2 \delta = 1$:

$$16t^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4a^2b^2 + 4c^2d^2 - 8abcd(\cos \beta \cos \delta - \sin \beta \sin \delta),$$

vagyis

$$16t^2 = 4a^2b^2 + 4c^2d^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 8abcd \cos(\beta + \delta).$$

A $16t^2$ érték – adott a, b, c, d oldalak esetén – tehát csak a $\cos(\beta + \delta)$ értékétől függ, mégpedig $16t^2$ -nek, és vele a pozitív t -nek akkor van maximuma, ha a $8abcd \cos(\beta + \delta)$ minimális, vagyis, $\cos(\beta + \delta)$ értéke minimális, azaz

$$\cos(\beta + \delta) = -1, \quad \text{ahonnan} \quad \beta + \delta = 180^\circ,$$

azaz a négyszög húrnégyszög.

Ortutay Miklós (Hajdúnánás, Körösi Csoma g. I. o. t.)