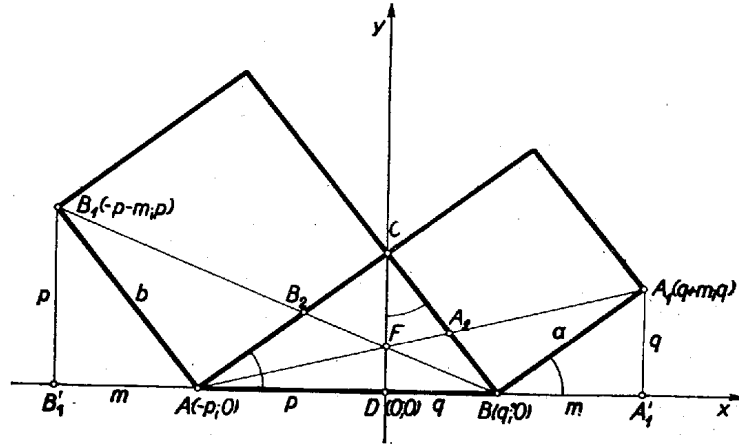


I. megoldás: A megoldók túlnyomórésze koordináta-geometriát használt. A derékszögű koordináta-rendszerben ábránkat sokféleképpen helyezhetjük el.

Legkevesebb számolást igényel a bizonyítás, ha az AB átfogó az x tengelyre, az átfogóhoz tartozó $CD = m$ magasság az y tengelyre esik. A betűzést és az egyes pontok koordinátáit az 1. ábra mutatja.



1. ábra

Az ACD és $B_1AB'_1$, továbbá a BCD és $A_1BA'_1$ derékszögű háromszögek egybevágók, és így $AB'_1 = BA'_1 = CD = m$, $A_1A'_1 = BD = q$, $B_1B'_1 = AD = p$.

Az AA_1 egyenes egyenlete:

$$(1) \quad y = \frac{q}{q+m+p}(x+p).$$

A BB_1 egyenes egyenlete

$$(2) \quad y = -\frac{p}{p+m+q}(x-q).$$

(1) és (2) egybevetéséből

$$q(x+p) = -p(x-q), \quad \text{azaz} \quad (p+q)x = 0,$$

és így a két egyenes metszéspontjának abszcisszája (mivel $p+q \neq 0$)

$$x = 0.$$

Ezzel igazoltuk a feladat állítását.

II. megoldás: Legyenek az AA_1 és BB_1 egyenesek metszéspontjai a szemközti befogón A_2 , illetőleg B_2 (1. ábra). A Ceva-féle tétel felhasználásával bizonyítjuk, hogy az AA_2 , BB_2 és CD egyenesek egy ponton mennek át. Az egyes oldalakon keletkező osztóviszonyok:

$$\begin{aligned} (BCA_2) &= \frac{BA_2}{A_2C} = \frac{BA_1}{CA} \cdot \frac{a}{b}, \\ (CAB_2) &= \frac{CB_2}{B_2A} = \frac{CB}{AB_1} = \frac{a}{b}, \\ (ABD) &= \frac{AD}{DB} = \frac{p}{q} = \frac{\frac{b^2}{c}}{\frac{c}{a^2}} = \frac{b^2}{a^2}. \end{aligned}$$

Tehát valóban

$$(BCA_2) \cdot (CAB_2) \cdot (ABD) = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{b^2}{a^2} = 1,$$

és így a Ceva-tétel megfordítása értelmében a három egyenes egy ponton megy át.

Elbert Árpád (Kaposvár, Közg. tech. III. o.t.)

III. megoldás: Koordináta-geometria és a Ceva-féle tétel nélkül is célhoz juthatunk. Az 1. ábra betűzését megtartva, tegyük fel, hogy az AA_1 egyenes a CD magasságot egy F_1 , a BB_1 egyenes pedig a CD magasságot egy F_2 pontban metszi. Mivel

$$AA'_1A_{1\Delta} \sim ADF_{1\Delta}, \quad \text{és} \quad BB'_1B_{1\Delta} \sim BDF_{2\Delta},$$

azért egyrészt (1. ábra)

$$(1) \quad DF_1 : A'_1 A_1 = AD : AA'_1,$$

másrészt

$$(2) \quad DF_2 : B'_1 B_1 = BD : BB'_1.$$

(1)-ből

$$DF_1 = \frac{A'_1 A_1 \cdot AD}{AA'_1} = \frac{qp}{p+q+m},$$

(2)-ből

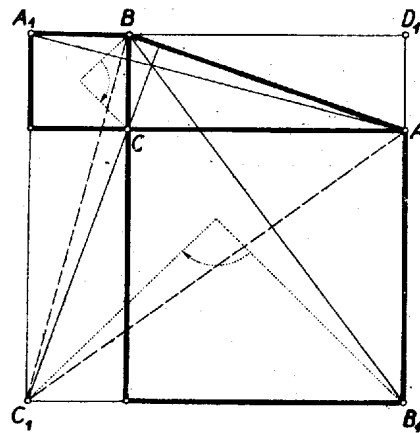
$$DF_2 = \frac{B'_1 B_1 \cdot BD}{BB'_1} = \frac{pq}{p+q+m}.$$

Tehát (1) és (2) egybevetéséből következik, hogy

$$DF_1 = DF_2, \quad \text{vagyis} \quad F_1 \equiv F_2 \equiv F.$$

Tatai Péter (Bp. XIV., I. István g. II. o. t.)

IV. megoldás: Egészítsük ki az ábrát az $A_1 C_1 B_1 D_1$ négyzetté (2. ábra).



2. ábra

Itt CC_1 merőleges AB -re – s így az ABC háromszög C -ből húzott magasságának meghosszabbítása –, mert ha az AD_1BC téglalapot elforgatjuk a BC befogó fölé rajzolt négyzet középpontja körül 90° -kal úgy, hogy B a C pontba jusson, akkor az A pont a C_1 be megy át, s így AB az elforgatás révén C_1C -be kerül.

Hasonlóan látható azonban az is, ha a nagy négyzetet forgatjuk el 90° -kal a középpontja körül úgy, hogy B_1 a C_1 -be kerüljön, hogy BB_1 az AC_1 -re és AA_1 a BC_1 -re merőleges, mert a mondott elforgatásnál a B_1BC_1 háromszög a C_1AA_1 háromszögre kerül.

Arra jutottunk, hogy AA_1 , BB_1 és CC_1 magasságvonalai az $ABC_1\Delta$ -nek, tehát igaz a feladat állítása, hogy egy ponton mennek keresztül.

Kolonits Ferenc (Bp. VIII., Piarista g. II. o. t.)