

I. megoldás: Induljunk ki a következő ismert azonosságból ¹

$$(1) \quad \binom{n+1}{k-1} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+2}{k}.$$

$k = 1$ esetén

$$\binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} = \binom{n+2}{1}.$$

Adjunk mindkét oldalhoz $\binom{n+2}{2}$ -t:

$$\binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} = \binom{n+2}{1} + \binom{n+2}{2} = \binom{n+3}{2}.$$

Mindkét esetben az első tag 1, és ez írható $\binom{n}{0}$ alakban is, így a következő azonosság látszik kialakulni:

$$(2) \quad \binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \dots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}$$

Ennek helyességét $k = 1$ -re és 2 -re már igazoltuk. Teljes indukcióval bizonyítjuk, hogy ez minden k -ra fennáll.

Tegyük fel, hogy valamilyen k -ra igaz (2). Adjunk mindkét oldalhoz $\binom{n+k+1}{k+1}$ -t:

$$\begin{aligned} \binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \dots + \binom{n+k}{k} + \binom{n+k+1}{k+1} &= \\ &= \binom{n+k+1}{k} + \binom{n+k+1}{k+1}. \end{aligned}$$

De (1) alapján a jobb oldal $\binom{n+k+2}{k+1}$, vagyis a (2) képlet $(k+1)$ -re is igaz, az adott S_k sor összege tehát

$$S_k = \binom{n+k+1}{k}.$$

Feladatkitűző megoldása

II. megoldás: Felhasználva, hogy $\binom{m}{k}$ az m elemből alkotható k -ad osztályú kombinációk száma, bebizonyítjuk az

$$\binom{n+k+1}{k} = \binom{n+k}{k} + \binom{n+k-1}{k-1} + \dots + \binom{n}{0}$$

azonosság helyességét. A bal oldal az $n+k+1$ elemből pl. az $1, 2, \dots, n+k+1$ számokból kiválasztható $k+1$ elemű kombinációk száma, vagyis a kiválasztható $k+1$ elemű csoportoké, ha az elemek sorrendjére nem vagyunk tekintettel, pl. mindig nagyság szerint növekvő sorrendben rendezzük az elemeket. Ezeket a csoportokat soroljuk osztályokba aszerint, hogy hány egymás utáni szám szerepel bennük a számsor elejéről. Az első csoportba az 1-et nem tartalmazó kombinációk száma nyilván

$$\binom{n+k}{k}.$$

Ezután jönnek azok a kombinációk, amelyek az 1-et tartalmazzák, de a 2-t nem, majd azok, amelyek az 1-et, 2-t tartalmazzák, de a 3-at nem s. i. t. Általában az $1, 2, \dots, i$ -t tartalmazó, de $i+1$ -et nem tartalmazó kombinációkban az $i+2, \dots, n+k+1$ elemek, vagyis $n+k-i$ elem közül kell a már kiválasztott $1, \dots, i$ elemek mellé még $k-i$ elemet kiválasztani. Az ilyen kombinációk száma tehát

$$\binom{n+k-i}{k-i}.$$

(Ez $i = 0$ -ra az 1-et nem tartalmazó kombinációk számát is kiadja, és helyes eredményt ad $i = k$ -ra is.) Ezt $i = 0, 1, \dots, k$ -ra összegezve valóban megkapjuk az $n+k+1$ elemből kiválasztható összes k -elemű kombinációk számát. Ezzel igazoltuk a fenti azonosságot.

¹Lásd a Matematikai Versenykézlepek I. rész 28. old. vagy a K. M. L. IV. kötet 1952. május-június, 121. old.

III. megoldás: Ismeretes,² hogy $\binom{m}{l}$ az $l = 0, 1, \dots, m$ értékekre az $(a + b)^m$ polinom alakjában fellépő együtthatók:

$$(a + b)^m = \binom{m}{0}a^m + \binom{m}{1}a^{m-1}b + \dots + \binom{m}{l}a^{m-l}b^l + \dots + \binom{m}{m}b^m.$$

Ezt figyelembe véve a feladatban szereplő összeg lesz az a^n tag együtthatója az

$$1 + (a + 1) + (a + 1)^2 + \dots + (a + 1)^{n+k}$$

összegben, ha ezt a hatványai szerint rendezzük. Ez az összeg egy $n + k + 1$ tagú mértani sor, melynek hányadosa $a + 1$, s így a következő zárt alakban írható:

$$\begin{aligned} \frac{(a + 1)^{n+k+1} - 1}{(a + 1) - 1} &= \frac{1}{a} \left\{ \binom{n+k+1}{0} a^{n+k+1} + \binom{n+k+1}{1} a^{n+k} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \binom{n+k+1}{i} a^{n+k+1-i} + \dots + \binom{n+k+1}{n+k} a + \binom{n+k+1}{n+k+1} - 1 \right\} \end{aligned}$$

A zárójelben az utolsó pozitív tag értéke 1, így a -val tagonként elvégezhető az osztás. Az n -edfokú tagot úgy kapjuk, hogy a zárójelben az $n + 1$ -edfokú tagot osztjuk a -val; az $n + 1$ -edfokú tag együtthatója pedig $\binom{n+k+1}{k}$. Így a következő azonossághoz jutottunk:

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \dots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}.$$

²Lásd a Matematikai Versenykérdések I. rész 64. old. vagy K. M. L. IV. kötet, 1952. május-június, 117. old.