

Emeljük négyzetre az első egyenletet:

$$x^2y^2(x^4 + 2x^2y^2 + y^4) = 78^2.$$

Helyettesítsük ebbe a második egyenletből $x^4 + y^4$ értékét, akkor

$$2x^4y^4 + 97x^2y^2 - 78^2 = 0,$$

ahonnan

$$x^2y^2 = \frac{-97 \pm \sqrt{9409 + 48\,672}}{4} = \frac{-97 \pm 241}{4}.$$

Valós gyökök csak a pozitív érték szolgáltat:

$$x^2y^2 = 36.$$

Ebből, mivel az első egyenlet szerint xy -nak pozitívnak kell lennie

$$xy = 6,$$

és az első egyenletből

$$x^2 + y^2 = \frac{78}{6} = 13.$$

Az utolsó két egyenletből következik, hogy

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 25, \quad (x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy = 1.$$

Világos, hogy kiindulási egyenleteinknek csak olyan valós számok tehetnek eleget, melyekben x és y ugyanolyan előjelű, továbbá, hogy így x, y értékpárral együtt a $-x, -y; y, x; -y, -x$ értékpárok is megoldást adnak. Elég tehát olyan megoldást keresni, amelyre $x > y > 0$, és ezekhez képest még a fenti 3 további értékpárt. Ilyen feltétel mellett $x + y$ és $x - y$ pozitív, tehát

$$x + y = 5, \quad x - y = 1, \quad \text{amiből } x_1 = 3, \quad y_1 = 2,$$

s a további 3 gyökpár

$$x_2 = 2, \quad y_2 = 3; \quad x_3 = -3, \quad y_3 = -2; \quad x_4 = -2, \quad y_4 = -3.$$

Parlagh Gyula (Kecskemét, Katona J. g. IV. o. t.)