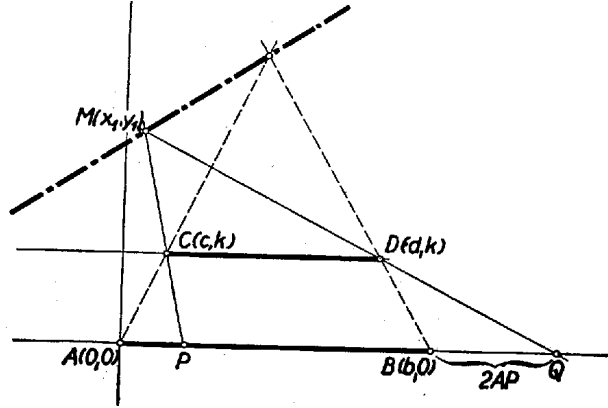


I. megoldás: Helyezzük el a derékszögű koordinátarendszerben az adott négy pontot a következőképpen (1. ábra):



1. ábra

$$A(0, 0), B(b, 0), C(c, k), D(d, k).$$

Legyen $M(x_1, y_1)$ a mértani hely egy pontja. Az MC és MD egyenesek metszik ki az AB egyenesből – jelen esetben az x tengelyből – a P és Q pontokat.

Az MC egyenes egyenlete:

$$(1) \quad y - y_1 = \frac{k - y_1}{c - x_1}(x - x_1).$$

Az MD egyenes egyenlete:

$$(2) \quad y - y_1 = \frac{k - y_1}{d - x_1}(x - x_1).$$

Határozzuk meg ezen egyeneseknek az x tengellyel való metszéspontjait.

Ha $y = 0$, akkor

(1)-ből P abszcisszája

$$x = \frac{kx_1 - cy_1}{k - y_1},$$

(2)-ből Q abszcisszája

$$x = \frac{kx_1 - dy_1}{k - y_1}.$$

A feladat szerint

$$2 \frac{kx_1 - cy_1}{k - y_1} = \frac{kx_1 - dy_1}{k - y_1} - b,$$

vagyis rendezés után x_1 és y_1 között a

$$2cy_1 - dy_1 + by_1 - kx_1 - bk = 0$$

összefüggés adódik, ami azt jelenti, hogy a mértani hely egyenlete:

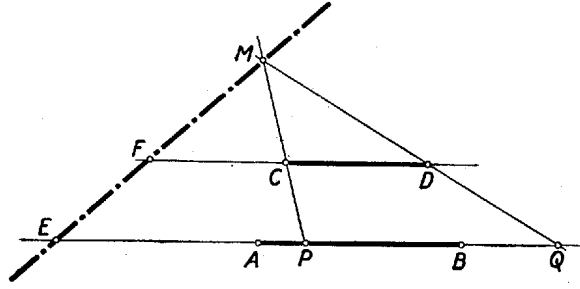
$$y = \frac{k}{b + 2c - d}x + \frac{bk}{b + 2c - d}.$$

Ez pedig egy egyenes egyenlete. Ha $b + 2c - d = 0$, akkor a fenti egyenlet $k(x_1 + b) = 0$ lesz, vagyis a mértani hely egyenlete $x = -b$, ez olyan egyenest jelent, amely merőleges az x tengelyre (vagyis az $e = AB$ egyenesre).

A mértani hely megszerkesztése legegyszerűbben úgy történik, hogy két pontját szerkesztjük meg.

Kolonits Ferenc (Bp., VIII., Piarista g. II. o. t.)

II. megoldás: Mérjük fel A -tól B -vel ellenkező irányban az $AE = AB$ távolságot (2. ábra), ekkor nyilván $PE = PQ$ és $BE = 2AE$, és így E a mértani hely egy pontja.



2. ábra

Kössük össze E -t M -mel, és mossa CD meghosszabbítása az EM egyenest F -ben, ekkor $FD \parallel EQ$ miatt, $CF = CD$. Tehát F a P pont helyzetétől független pontja a CD egyenesnek. Más szóval: a mértani hely bármely M pontját összekötve az E ponttal, az így nyert egyenes mindig átmegy az F ponton, tehát az M pont az EF egyenesen mozog. Könnyű belátni, ha P befutja az e egyenest, M befutja az EF egyenest, vagyis az EF egyenes a keresett mértani hely. Ha $PC \parallel EF$, akkor $EP = FC = \frac{FD}{2}$, és így

$$EQ = EB - BQ = 2EA - 2 \left(EA - \frac{FD}{2} \right) = FD,$$

vagyis QD is párhuzamos EF -fel, vagyis az M pont mint olyan nem létezik.