Mivel mindhárom szög cosinusa pozitív, azért mind a három szög hegyesszög.

$a+\beta+\gamma=180°$-ból következik, hogy

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(180-\gamma)=-\cos\gamma,$$

vagyis

$$\cos\alpha\cos\beta+\cos\gamma=\sin\alpha\sin\beta=\sqrt{(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)}, \tag{1}$$

és fordítva (1)-től következik, hogy $\alpha+\beta+\gamma=180°$.

A feladat adatai szerint:

$$\begin{aligned}\cos\alpha\cos\beta&=\frac{\sqrt{12}}{16\cos^2 10°}=\frac{\sqrt3}{8\cos^2 10°},\\ 1-\cos^2\alpha&=1-\frac{1}{8\cos^2 10°}=\frac{8\cos^2 10°-1}{8\cos^2 10°},\\ 1-\cos^2\beta&=1-\frac{3}{8\cos^2 10°}=\frac{8\cos^2 10°-3}{8\cos^2 10°}.\end{aligned}$$

Tehát (1) így írható

$$\frac{\sqrt3}{8\cos^2 10°}+\frac{1}{2\cos 10°}=\frac{\sqrt{64\cos^4 10°-32\cos^2 10°+3}}{8\cos^2 10°}. \tag{2}$$

Ha bebizonyítjuk, hogy ez azonosság, akkor igazoltuk a feladat állítását.

A törteket eltávolítva

$$\sqrt3+4\cos 10°=\sqrt{64\cos^4 10°-32\cos^2 10°+3}.$$

Négyzetre emelve, rendezve és $16\cos 10°$-kal egyszerűsítve.

$$4\cos^3 10°-3\cos 10°-\frac{\sqrt3}{2}=0. \tag{3}$$

De ismeretes, hogy $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$, és így

$$4\cos^3 10°-3\cos 10°=\cos 30°=\frac{\sqrt3}{2},$$

tehát (3) helyes, és mivel az átalakítások fordított sorrendben is elvégezhetők, (2) is igaz.

Simon László (Bp., XI., József A. g. III. o. t.)