

Először általánosságban oldjuk meg a problémát. Kiindulunk az ismert összefüggésből, amely szerint a leadott hőmennyiség megegyezik a felvett hőmennyiséggel, eltekintve a hőveszteségtől. Jelen esetben tehát (a víz fajhője egységnyi lévén) az első átöntés után a víz t_1 hőfoka a következő egyenletből számítható ki:

$$(m - v)(t - t_1) = v(t_1 - d),$$

ahonnan

$$(1) \quad t_1 = \frac{(m - v)t + vd}{m} = \frac{(m - v)t + d[m - (m - v)]}{m}.$$

Ennek alapján a második átöntés után a víz hőfoka

$$\begin{aligned} t_2 &= \frac{(m - v)t_1 + vd}{m} = \frac{(m - v)^2 t + d[m(m - v) - (m - v)^2]}{m^2} + \frac{mvd}{m^2} = \\ &= \frac{(m - v)^2 t + d[m^2 - (m - v)^2]}{m^2}. \end{aligned}$$

Be fogjuk bizonyítani teljes indukcióval, hogy az n -edik átöntés után

$$(2) \quad t_n = \frac{(m - v)^n t + d[m^n - (m - v)^n]}{m^n}.$$

Legyen ugyanis

$$t_k = \frac{(m - v)^k t + d[m^k - (m - v)^k]}{m^k},$$

akkor (1) alapján

$$\begin{aligned} t_{k+1} &= \frac{(m - v)t_k + vd}{m} = \frac{m - v}{m} t_k + \frac{vd}{m} = \frac{(m - v)^{k+1} t + d[m^k(m - v) - (m - v)^{k+1}]}{m^{k+1}} + \\ &+ \frac{m^k vd}{m^{k+1}} = \frac{(m - v)^{k+1} t + d[m^{k+1} - (m - v)^{k+1}]}{m^{k+1}}. \end{aligned}$$

Mivel továbbá láttuk – $n = 2$ (és $n = 1$) esetén a (2) képlet igaz, azért (2) bármely n természetes szám esetén is igaz.

Ezek után alkalmazhatjuk a (2) képletet a jelen feladatra.

$$a) \quad t_{100} = \frac{3980^{100} \cdot 60 + 10(4000^{100} - 3980^{100})}{4000^{100}} = \left(\frac{398}{400}\right)^{100} \cdot 50 + 10 = 30,13 + 10 = 40,13 \text{ C}^\circ.$$

b) Jelöljük a szükséges vízcserék számát x -szel.

$$t_x = 28 = \frac{3980^x 40 + 15(4000^x - 3980^x)}{4000^x} = \left(\frac{398}{400}\right)^x \cdot 25 + 15,$$

amiből

$$\left(\frac{398}{400}\right)^x = \frac{13}{25},$$

vagyis

$$x = \frac{\lg 25 - \lg 13}{\lg 400 - \lg 398} \sim \frac{0,284}{0,0022} = 129,1.$$

Pödör Bálint (Bp. II., Rákóczi g. III. o. t.)