

I. megoldás: Jelöljük a bal oldalt S_n -nel, akkor (a jobb oldalon felhasználva a számtani sorozat összegképletét)

$$S_n = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

$n = 1$ esetén állításunk igaz. Végezhetjük a bizonyítást teljes indukcióval.

Tegyük fel, hogy

$$S_k = \frac{k^2(k+1)^2}{4},$$

akkor

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = (k+1)^2 \left(\frac{k^2}{4} + k + 1 \right) = \\ &= (k+1)^2 \frac{k^2 + 4k + 4}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}, \end{aligned}$$

vagyis, ha k -ra igaz, akkor $(k+1)$ -re igaz.

Tusnády Gábor (Sátoraljaújhely, Kossuth g. II. o. t.)

II. megoldás:

$$\begin{aligned} (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 &= 1^2 + (2 \cdot 1 \cdot 2 + 2^2) + [2(1+2)3 + 3^2] + \dots \\ &+ [2(1+2+\dots+(k-1))k + k^2] + \dots + [2(1+2+\dots+(n-1))n + n^2]. \end{aligned}$$

Megmutatjuk, hogy minden szögletes zárójelben egy-egy köbszám áll. Ugyanis

$$1 + 2 + \dots + (k-1) = \frac{(k-1)k}{2},$$

tehát

$$2(1 + 2 + \dots + (k-1))k + k^2 = (k-1)k^2 + k^2 = k^3,$$

és így

$$(1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + \dots + n^3.$$

Máthé csaba (Győr, Révay g. I. o. t.)