

Mivel $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, és $\cos 3x = \cos(2x + x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = (1 - 2 \sin^2 x) \cos x - 2 \sin^2 x \cos x = \cos x(1 - 4 \sin^2 x)$, azért egyenletünk 0-ra redukálva így írható:

$$2 \sin x \cos x - \cos x(1 - 4 \sin^2 x) = 0,$$

vagyis

$$\cos x(4 \sin^2 x + 2 \sin x - 1) = 0.$$

Itt vagy

$$(1) \quad \cos x = 0$$

vagy

$$(2) \quad 4 \sin^2 x + 2 \sin x - 1 = 0.$$

Az (1) esetben

$$x_1 = 90^\circ \pm k \cdot 360^\circ, \quad x_2 = 270^\circ \pm k \cdot 360^\circ \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

A (2) esetben

$$\sin x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 16}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

A *közelítő* értékeket kiszámítva, a táblázatból x -re 18° , ill. -54° adódik, de természetesen kétséges, hogy ezek az értékek pontosak.

E kérdést eldönthetjük, ha kiszámítjuk $\sin 18^\circ$ és $\sin 54^\circ$ értékét. Ez történhetik pl. a következőképpen:

Ismeretes goniometriai összefüggéseket felhasználva

$$\begin{aligned} 2 \sin 36^\circ \cos 36^\circ &= \sin 72^\circ, \\ 2 \sin 72^\circ \cos 72^\circ &= \sin 144^\circ = \sin 36^\circ. \end{aligned}$$

E két azonosság szorzatát $\sin 36^\circ \sin 72^\circ$ -kal egyszerűsítve

$$(1) \quad 4 \cos 36^\circ \cos 72^\circ = 4 \sin 54^\circ \sin 18^\circ = 1.$$

(1) figyelembevételével

$$(2) \quad \sin 54^\circ - \sin 18^\circ = 2 \cos 36^\circ \sin 18^\circ = 2 \sin 54^\circ \sin 18^\circ = \frac{1}{2}.$$

Másrészt

$$(\sin 54^\circ + \sin 18^\circ)^2 = (\sin 54^\circ - \sin 18^\circ)^2 + 4 \sin 54^\circ \sin 18^\circ,$$

és így (2) és (1)-et felhasználva

$$(3) \quad \sin 54^\circ + \sin 18^\circ = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

(2)-ből és (3)-ból

$$\sin 18^\circ = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \quad \text{és} \quad \sin 54^\circ = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

Tehát

$$\begin{aligned} x_3 &= 18^\circ \pm k \cdot 360^\circ, & x_4 &= 162^\circ \pm k \cdot 360^\circ, \\ x_5 &= 234^\circ \pm k \cdot 360^\circ, & x_6 &= 306^\circ \pm k \cdot 360^\circ, \\ &\text{ahol } k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Behelyettesítéssel meggyőződhetünk, hogy mind a hat főérték kielégíti egyenletünket.

Papp Kálmán (Bp. IX., Fáy A. g. IV. o. t.)

II. megoldás: Egyenletünket így írhatjuk:

$$\sin 2x = \sin(90^\circ - 3x).$$

Ez az egyenlet két esetben áll fenn, ha

$$2x = 90^\circ - 3x \pm k \cdot 360^\circ \quad \text{vagy} \quad 180^\circ - 2x = 90^\circ - 3x \pm k \cdot 360^\circ.$$

Az elsőből

$$5x = 90^\circ \pm k \cdot 360^\circ, \quad \text{azaz} \quad x = 18^\circ \pm k \cdot 72^\circ.$$

Innen aszerint, hogy $k = 5l, 5l + 1, 5l + 2, 5l + 3, 5l + 4$ alakú

$$\begin{aligned} x_1 &= 18^\circ \pm l \cdot 360^\circ, & x_2 &= 90^\circ \pm l \cdot 360^\circ, & x_3 &= 162^\circ \pm l \cdot 360^\circ, \\ x_4 &= 234^\circ \pm l \cdot 360^\circ, & x_5 &= 306^\circ \pm l \cdot 360^\circ. & (l &= 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

A második egyenlőségéből

$$x_6 = -90^\circ \pm k \cdot 360 = 270^\circ \pm k' \cdot 360^\circ \text{ (ahol } k' = k - 1, k = 1, 2, \dots).$$