

I. megoldás: A $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$ szöveget is adottnak tekintjük.

a) A háromszög csúcsaihoz mutató körsugarak a kerületi és középponti szögek összefüggése szerint 2α , 2β , 2γ szöveget zárnak be. Meghúzva a keletkezett egyenlő szárú háromszögek szimmetriatengelyét, a kapott derékszögű háromszögekből leolvashatjuk, hogy

$$\frac{a}{2} = r \sin \alpha, \quad \frac{b}{2} = r \sin \beta, \quad \frac{c}{2} = r \sin \gamma.$$

E három egyenlőség összeadásával

$$s = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} = r(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma),$$

ahonnan

$$r = \frac{s}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}.$$

b) A beírt ϱ sugarú kör érintési pontjainak távolságát az A , B , C csúcspontoktól (a megfelelő oldalakon mérve) rendre x , y , z -vel jelölve, mivel a kör középpontja a szögfelezők metszéspontja

$$x = \varrho \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}, \quad y = \varrho \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}, \quad z = \varrho \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}.$$

E három egyenlőség összeadásából (mivel $2x + 2y + 2z = 2s$)

$$x + y + z = s = \varrho \left(\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} \right),$$

ahonnan

$$\varrho = \frac{s}{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}}.$$

Náray Miklós (Bp., VIII., Széchenyi g. II. o. t.)

II. megoldás: a) Ismeretes, hogy

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}, \quad \cos \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}, \quad \cos \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}},$$

tehát – a háromszög területét t -vel jelölve

$$\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s^3(s-a)(s-b)(s-c)}{a^2b^2c^2}} = \frac{st}{abc}.$$

Másrészt $\sin \gamma = \frac{c}{2r}$ (lásd az I. megoldást) felhasználásával

$$t = \frac{ab \sin \gamma}{2} = \frac{abc}{4r}$$

és így

$$\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} = \frac{s}{abc} \cdot \frac{abc}{4r} = \frac{s}{4r},$$

ahonnan

$$r = \frac{s}{4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}.$$

b) Ugyancsak összeszorozva az ismert

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}, \quad \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}, \quad \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$

összefüggéseket, nyerjük – egyszerűsítés után –, hogy

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s^3}}.$$

A gyökjel alatt s -sel bővítve

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{t}{s^2} = \frac{s\varrho}{s^2} = \frac{\varrho}{s},$$

ahonnan

$$\varrho = s \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}.$$

Bartók Károly (Székesfehérvár, József A. g. IV. o. t.)

Megjegyzések: 1. Berkes Jenő: „A talpponti háromszögről” c. cikkében (K. M. L. XII. kötet 3. sz., 1956. márc.) a (XII.) formula szerint (70. old.)

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = \frac{K}{2r} = \frac{s}{r},$$

az (V. 2.) képlet szerint (68. old.)

$$\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} = \frac{s}{4r},$$

és az (V. 3) képlet (69. old.) szerint

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho}{s}.$$

Ezek az eredmények egyeznek az I. megoldás *a*), illetőleg a II. megoldás két eredményével.

Wollner Róbert (Szeged, Radnóti g. IV. o. t.)

2. Az I. és II. megoldás *a*) eredményeinek összevetéséből következik a következő ismert trigonometriai összefüggés:

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}. \quad (\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ)$$

A *b*) eredmények összehasonlítása pedig az

$$\frac{1}{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$$

összefüggéshez vezet, amelyből leolvasható, hogy

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}. \quad (\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ)$$

Ha ezt az összefüggést $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$ -val szorozzuk, nyerjük, hogy

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = 1. \quad (\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ)$$