

I. megoldás: A $+1$ és (-1) -ektől eltekintve

$$S'_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1).$$

Mindkét oldalt $1 \cdot 2$ -vel osztva

$$\begin{aligned}\frac{S'_n}{2} &= \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2} + \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{(n+1)n}{1 \cdot 2} = \\ &= \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \dots + \binom{n+1}{2}.\end{aligned}$$

Felhasználva a binomiális együtthatóknak azt a tulajdonságát (lásd a „Középiskolai szakköri füzetek” sorozatában a „Kombinatorika” c. füzet 30–31. oldalán), hogy

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k} + \dots + \binom{k+1}{k} + \binom{k}{k} &= \binom{n+1}{k+1}, \\ \frac{S'_n}{2} = \binom{n+2}{3} &= \frac{(n+2)(n+1)n}{1 \cdot 2 \cdot 3},\end{aligned}$$

amiből

$$S'_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Ha a keresett sorozat összegét S_n -nel jelöljük, akkor

páros n esetén $S_n = S'_n$,

páratlan n esetén $S_n = S'_n - 1$.

Győry Kálmán (Ózd, József A. g. III. o. t.)

II. megoldás: A jelölést megtartva S_n így írható

$$S_n = (1^2 + 1 - 1) + (2^2 + 2 + 1) + (3^2 + 3 - 1) + \dots + [n^2 + n + (-1)^n].$$

Átrendezve

$$\begin{aligned}S_n &= (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + (1 + 2 + \dots + n) + \\ &\quad + [-1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^n].\end{aligned}$$

De ismeretes, hogy az első zárójelben levő összeg $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, a második zárójelben levő összeg pedig a számtani sorozat összegképlete alapján $\frac{n(n+1)}{2}$; a harmadik zárójelben levő összeg pedig 0, ha n páros, és -1 , ha n páratlan.

Az első két tag összege

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3n(n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+4)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3},$$

és így

$$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + \frac{(-1)^n - 1}{2}.$$

Vannay László (Esztergom, Ferences g. IV. o. t.)