I. megoldás: Alakítsuk át a következőképpen az adott kifejezést:

$$\begin{gathered}a^{2n+1}+(a-1)^{n+2}=a\cdot a^{2n}+(a-1)^2(a-1)^n=\\=a\cdot a^{2n}+(a^2-a+1-a)(a-1)^n=(a^2-a+1)(a-1)^n+\\+a\big[(a^2)^n-(a-1)^n\big].\end{gathered}$$

Az átalakított kifejezés első tagja osztható (a^2-a+1)-gyel, mert ez tényezői között szerepel. A második tag második tényezője is osztható (a^2-a+1)-gyel, mert x^n-y^n mindig osztható $(x-y)$-nal. Mivel a két tag mindegyike osztható (a^2-a+1)-gyel, ezért az eredeti kifejezés is osztható (a^2-a+1)-gyel.

Trón Lajos (Debrecen, Fazekas g. II. o. t.)

II. megoldás: Teljes indukcióval igazoljuk, hogy az állítás már 0-tól kezdve is igaz.

Az állítás $n=0$-ra teljesül, mert

$$P_0(a)=a+(a-1)^2=a+a^2-2a+1=a^2-a+1.$$

Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n=k$-ra, azaz

$$P_k(a)=a^{2k+1}+(a-1)^{k+2}$$

osztható (a^2-a+1)-gyel.

Ekkor

$$\begin{aligned}P_{k+1}(a)&=a^{2k+3}+(a-1)^{k+3}=a^2\cdot a^{2k+1}+(a-1)(a-1)^{k+2}=\\&=a^2\big[a^{2k+1}+(a-1)^{k+2}\big]+(a-1)(a-1)^{k+2}-a^2(a-1)^{k+2}=\\&=a^2P_k(a)-(a^2-a+1)(a-1)^{k+2},\end{aligned}$$

azaz $P_{k+1}\ (a)$ is osztható (a^2-a+1)-gyel, ha $P_k(a)$-ra már igaz az állítás. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Lőrinczy Lajos (Szolnok, Verseghy F. g. III. o. t.)