

I. megoldás: Négyszög létezésének szükséges és elégséges feltétele, hogy bármely oldala kisebb legyen a másik három oldal összegénél. Jelöljük a négyszög oldalait x, y, z, u -val, és legyen a kerülete $x + y + z + u = 2s$. A fentiek szerint

$$x < y + z + u.$$

Mindkét oldalhoz x -et adva, és 2-vel osztva nyerjük, hogy

$$x < s.$$

Teljesen hasonlóan adódnak az

$$y < s, \quad z < s, \quad u < s$$

egyenlőtlenségek. Mivel az itt végzett átalakítások visszafelé is elvégezhetők, azért e négy egyenlőtlenség kifejezi a négyszög létezésének szükséges és elégséges feltételét.

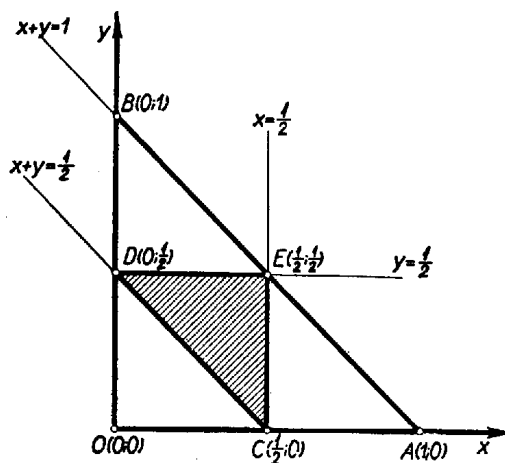
Feladatunk tehát így is fogalmazható: Mi annak valószínűsége, hogy egy egységnyi szakaszt találomra x, y, z, u részekre osztva

$$x < \frac{1}{2}, \quad y < \frac{1}{2}, \quad z < \frac{1}{2}, \quad u < \frac{1}{2}.$$

Ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben az

$$x + y = 1 - (z + u)$$

függvényt, hol z -t és u -t egyelőre állandónak tekintjük. Ez nyilván egy egyenes, amely mind az x , mind az y tengelyből $1 - (z + u)$ hosszúságú szakaszt vág le. Mivel $1 - (z + u)$ maximuma 1, és minimuma 0, azért az összes lehetséges eseteket az $O(0; 0)$, $A(1; 0)$, $B(0; 1)$ pontok által (ld. az ábrát) meghatározott háromszög belsejében levő pontok jellemzik.



Az előbbieket értelmében kedvezők csak az olyan $(x; y)$ pontok, amelyekre nézve

$$(1) \quad x < \frac{1}{2}, \quad y < \frac{1}{2}.$$

Most két egyenlő esélyes, vagylagos esetet kell megkülönböztetni:

$$(a) \quad x + y \geq \frac{1}{2}, \quad \text{vagy}$$

$$(b) \quad x + y < \frac{1}{2}.$$

(a) Az $x + y > \frac{1}{2}$ egyenlőtlenségnek eleget tevő pontok az

$$x + y = \frac{1}{2}$$

egyenesnek ellenkező oldalán vannak, mint az origó.

Tehát a $C\left(\frac{1}{2}; 0\right)$, $D\left(0; \frac{1}{2}\right)$ és $E\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ pontok által meghatározott háromszög belsejében fekvő pontok koordinátái (és csakis ezek) elégítik ki mind az (1), mind az (a) követelményt. De ha (a) teljesül, akkor

$$z + u \leq \frac{1}{2},$$

és így $z < \frac{1}{2}$, és $u < \frac{1}{2}$ is teljesül.

Tehát az (a) esetben a $CDE\triangle$ területe törve az $AOB\triangle$ területével adja meg a négyszög létezésének valószínűségét, vagyis

$$v_a = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}.$$

A (b) esetben $z + u > \frac{1}{2}$, és most az előbbi megfontolásokat egy z és u tengelyű derékszögű koordináta-rendszerben végezve el a $(z; u)$ pontokra, ugyanígy kapjuk, hogy

$$v_b = \frac{1}{4}.$$

Tehát a keresett valószínűség

$$v = v_a + v_b = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Győry Kálmán (Ózd, József Attila g. III. o. t.)

II. megoldás: Egyszerű és elegáns megoldáshoz jutunk, ha felhasználjuk a következő segédtelet: A szabályos tetraéder egy belső pontjának a négy oldallaptól való távolságainak összege a tetraéder magasságával egyenlő.

Legyen ugyanis a tetraéder magassága m , egy oldallap területe t , a P pont távolsága az oldallapoktól rendre m_1 , m_2 , m_3 és m_4 . A P pont mindegyik oldallappal egy háromoldalú gúlát határoz meg. E 4 részgúla köbtartalmainak összege egyenlő az eredeti tetraéder köbtartalmával. Tehát

$$\frac{tm_1}{3} + \frac{tm_2}{3} + \frac{tm_3}{3} + \frac{tm_4}{3} = \frac{tm}{3}$$

ahonnan

$$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = m.$$

Legyen az adott szakasz m , és tekintsünk egy m magasságú szabályos tetraédert. E tetraéder minden belső pontjának az oldallapoktól mért m_1 , m_2 , m_3 , m_4 távolságai – a segédtelet szerint – m -nek egy lehetséges felbontását jellemzik.

Kedvezőek, csak azok a pontok (amint azt a I. megoldásban láttuk), amelyekre nézve $m_i < \frac{m}{2}$ ($i = 1, 2, 3, 4$). A kedvező pontok tehát a tetraéder éleinek felezőpontjai, mint csúcok által meghatározott oktaéder belsejében vannak. A keresett valószínűség tehát az oktaéder és a tetraéder köbtartalmának aránya.

Legyen a tetraéder köbtartalma K . Az oktaéder úgy keletkeztethető, hogy az eredeti tetraéderből a 4 élfelezősík által lemetezett 4 félélhosszúságú szabályos tetraédert eltávolítjuk. Utóbbiak mindegyikének köbtartalma $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot K = \frac{K}{8}$,

és így a 4 lemetezett tetraéder köbtartalmának összege $\frac{K}{2}$. A megmaradt oktaéder köbtartalma tehát $K - \frac{K}{2} = \frac{K}{2}$, vagyis a keresett valószínűség

$$v = \frac{\frac{K}{2}}{K} = \frac{1}{2}.$$

Argay Gyula (Balassagyarmat, Balassi g. IV. o. t.)