

Először *szükséges* feltételt adunk arra, hogy a háromoldalú csonkagúla köré gömböt írassunk.

Ha a csonkagúla köré gömb írható, akkor a csonkagúla trapéz oldallapjai egy-egy kört vágnak ki a gömbből. A körbe írható trapéz azonban – mint ismeretes – egyenlő szárú. A gúla egyik oldaltrapézének szára tehát egyenlő a másikkal, de a szomszédos trapéz lap szintén egyenlő szárú, és így a harmadik oldalél is ugyanolyan hosszú, mint a másik kettő.

Annak szükséges feltétele tehát, hogy a csonkagúla köré gömböt írassunk, az, hogy a csonkagúla oldalélei egyenlők legyenek.

Megmutatjuk, hogy e feltétel elégséges is. Ha ugyanis a csonkagúla egyenlő oldalélű, akkor a teljes gúla is az, amelyből a csonkagúla származtatható, mert az oldaltrapézek alapján levő szögek egyenlők. A csonkagúla köré rajzolható gömb középpontja egyenlő távol van a csonkagúla mind a hat csúcsától, s így szükségképpen rajta van a két alapháromszög köré írható körök középpontjában az alapháromszögek síkjaira emelt merőlegeseken, amelyek egybeesnek, mert átmennek a teljes gúla csúcspontján, és mert az alapháromszögek síkjai párhuzamosak. (Ez a két egybeeső merőleges tulajdonképpen a teljes gúla magasságvonala.) Ha az alaplapok $A_1B_1C_1 \Delta$, $A_2B_2C_2 \Delta$, és e két háromszög köré írt körök középpontjai O_1 , illetőleg O_2 , akkor az $O_1O_2A_2A_1$, $O_1O_2B_2B_1$ és $O_1O_2C_2C_1$ derékszögű trapézok mind egybevágóak. Ha tehát az O_1O_2 egyenesen megszerkesztjük azt az O pontot, amely A_1 és A_2 -től egyenlő távolságra van, akkor ez az O pont egyszersmind B_1 , B_2 , C_1 és C_2 -től is ugyanakkora távol van, és így ez az O pont a tetraéder köré írt gömb középpontja.

Bergmann György (Bp. XIV., Magyar–oroszl g. IV. o. t.)

Megjegyzések: 1. Könnyen belátható, hogy az oldalélek egyenlősége egyenértékű azzal, hogy *a*) az oldaléleknek az alaphoz való hajlásszögei egyenlők, *b*) a teljes gúla magassága az alapháromszög köré írt kör középpontjában metszi az alaplapot. (Vagyis más szóval: a gúla ún. „egyeses” gúla.) Mindezek a tulajdonságok megadhatók szükséges és elégséges feltétel gyanánt.

2. Ha a gúla n -oldalú, akkor a szükséges és elégséges feltétel változatlan. (Nem kell külön kikötni, hogy az alap n -szögek körbeírhatóak, mert ez már következik abból, hogy a teljes gúla oldalélei egyenlő szöget zárnak be az alaplappal.)