

I. megoldás: Az egyenletből kiszámítjuk $\sin \alpha$ -t. Mivel α és β pótszögek

$$\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

vagyis

$$\sin \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}.$$

Négyzetreemelve és rendezve

$$2 \sin^2 \alpha - \sqrt{2} \sin \alpha - \frac{1}{2} = 0,$$

amiből

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}.$$

(A másik, negatív gyök nem felel meg a feladatnak, mivel $\sin \alpha > 0$.)

$\sqrt{2}$ és $\sqrt{6}$ körzővel és vonalzóval megszerkeszthető. Ha olyan derékszögű háromszöget szerkesztünk, melynek átfogója 4, egyik befogója $\sqrt{2} + \sqrt{6}$, akkor a megszerkesztett háromszög $\sqrt{2} + \sqrt{6}$ befogójával szemközi szöge α , mellette fekvő szöge β .

Heinemann Zoltán (Pécs, Bányai. t. IV. o. t.)

II. megoldás: Mivel $\beta = 90^\circ - \alpha$, ezért $\sin \beta = \cos \alpha$. Tehát olyan α -t kell keresnünk, amelyre fennáll, hogy

$$\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Négyzetre emelve

$$\sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{1}{2},$$

ebből

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha = \frac{1}{2}.$$

Ezt az egyenletet két (180° -nál kisebb) szög elégíti ki:

$$2\alpha_1 = 150^\circ, \quad \text{és} \quad 2\alpha_2 = 30^\circ$$

azaz

$$\alpha_1 = 75^\circ, \quad \text{és} \quad [\alpha_2 = 15^\circ]$$

Behelyettesítéssel meggyőződhetünk, hogy az utóbbi érték nem elégíti ki egyenletünket. (A négyzetreemelés folytán bekerült hamis gyök.)

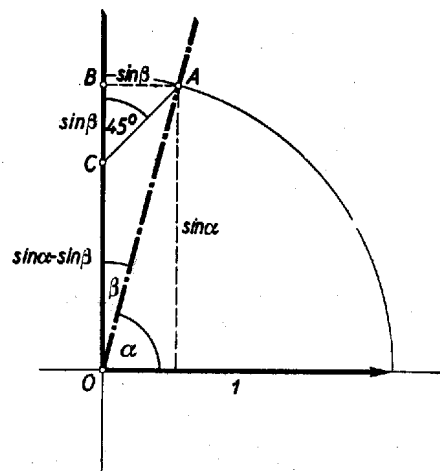
A feladat megoldása tehát

$$\alpha = 75^\circ,$$

mely szög előállítható pl. $45^\circ + 30^\circ$ alakban, ez pedig körzővel és vonalzóval szerkeszthető.

Szatmáry Zoltán (Bp. VIII., Piarista g. IV. o. t.)

III. megoldás: Vegyünk fel két merőleges egyenest az egységsugarú körívvel, és osszuk a derékszöget két részre: α -ra és β -ra.



Az ábráról $\sin \alpha$ és $\sin \beta$ értéke közvetlenül leolvasható: $OB = \sin \alpha$, $AB = \sin \beta$. Ha $\sin \beta$ -t ($= BA$) levonjuk BO -ból, akkor a nyert különbség

$$OC = \sin \alpha - \sin \beta.$$

Ha azt akarjuk tehát, hogy $\sin \alpha - \sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ legyen, akkor megszerkesztjük a $\frac{\sqrt{2}}{2}$ értéket, ezt fölmérjük a derékszög egyik szárára $OC (< 1)$ hosszúság gyanánt. C -ből kiinduló, CB iránnyal 45° -os szöget bezáró félegyenes metszi ki az egységsugarú körből az A pontot. Az OA szolgáltatja a kívánt tulajdonságú α és β szögeket.

Megjegyzés: Látható, hogy ez a szerkesztési mód nemcsak a jelen esetben, hanem mindig alkalmazható, ha olyan α -t és β -t kell szerkeszteni, melyeknek összege 90° , és amelyek sinusainak különbsége tetszőleges körzővel és vonalzóval szerkeszthető 0 és 1 közötti számérték. Nem kell mást tenni, csupán a számértéknek megfelelő szakaszt megszerkeszteni, és felmérni OC gyanánt.

Frivaldszky Sándor (Bp. II., Rákóczi g. IV. o. t.)