I. megoldás: Jelöljük a vizsgálandó kifejezést $\mathrm{f}(n)$-nel, s alakítsuk át a következőképpen:

$$\mathrm{f}(n) = nx^{n+1}\left(1-\frac{1}{x}\right) - x^n\left(1-\frac{1}{x^n}\right) = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1.$$

Az utóbbi alakban fogjuk bizonyítani n-re vonatkozó teljes indukcióval, hogy osztható $(x-1)^2$-tel.

Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén $\mathrm{f}(k)$ osztható $(x-1)^2$-tel, bizonyítjuk, hogy ebből következik, hogy $f(k+1)$ is osztható vele. Vegyük a kettő különbségét:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{f}(k+1) - \mathrm{f}(k) = (k+1)x^{k+2} - (k+2)x^{k+1} + 1 - kx^{k+1} + (k+1)x^k - 1 = \\
&= (k+1)x^{k+2} - 2(k+1)x^{k+1} + (k+1)x^k = (k+1)x^k(x^2-2x+1) = \\
&= (k+1)x^k(x-1)^2.
\end{aligned}$$

$\mathrm{f}(k+1) - \mathrm{f}(k)$ tehát osztható $(x-1)^2$-tel, viszont feltevésünk szerint $\mathrm{f}(k)$ is, ekkor pedig $\mathrm{f}(k+1)$-nek is oszthatónak kell lennie.

Mivel $n = 1$-re igaz az állításunk, mert $\mathrm{f}(1) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$, azért minden természetes számra igaz.

Gergely Ervin (Bp. IV., Könyves Kálmán g. IV. o. t.)

II. megoldás: Az adott kifejezést a következő alakban írhatjuk:

$$\begin{aligned}
&nx^{n+1} - nx^n - x^n + 1 = nx^n(x-1) - (x^n - 1) = \\
&= (x-1)\big[nx^n - (x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1)\big] = \\
&= (x-1)\big[(x^n - x^{n-1}) + (x^n - x^{n-2}) + \ldots + (x^n - x) + (x^n - 1)\big].
\end{aligned}$$

A szögletes zárójelben levő minden különbség osztható $(x-1)$-gyel, tehát a kifejezésből kiemelhető $(x-1)^2$. (Erre abból is következtethettünk volna, hogy a szögletes zárójelben levő kifejezés az $x = 1$ helyen 0-vá válik.)

Bartók Károly (Székesfehérvár, József A. g. IV. o. t.)