I. megoldás: Jelöljük a vizsgálandó kifejezést $\mathrm{f}(n)$-nel, s alakítsuk át a következőképpen:

$$\mathrm{f}(n)=nx^{n+1}\left(1-\frac{1}{x}\right)-x^{n}\left(1-\frac{1}{x^{n}}\right)=nx^{n+1}-(n+1)x^{n}+1.$$

Az utóbbi alakban fogjuk bizonyítani n-re vonatkozó teljes indukcióval, hogy osztható $(x-1)^2$-tel.

Tegyük fel, hogy $n=k$ esetén $\mathrm{f}(k)$ osztható $(x-1)^2$-tel, bizonyítjuk, hogy ebből következik, hogy $f(k+1)$ is osztható vele. Vegyük a kettő különbségét:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{f}(k+1)-\mathrm{f}(k)=(k+1)x^{k+2}-(k+2)x^{k+1}+1-kx^{k+1}+(k+1)x^{k}-1=\\
&=(k+1)x^{k+2}-2(k+1)x^{k+1}+(k+1)x^{k}=(k+1)x^{k}(x^{2}-2x+1)=\\
&=(k+1)x^{k}(x-1)^{2}.
\end{aligned}$$

$\mathrm{f}(k+1)-\mathrm{f}(k)$ tehát osztható $(x-1)^2$-tel, viszont feltevésünk szerint $\mathrm{f}(k)$ is, ekkor pedig $\mathrm{f}(k+1)$-nek is oszthatónak kell lennie.

Mivel $n=1$-re igaz az állításunk, mert $\mathrm{f}(1)=x^2-2x+1=(x-1)^2$, azért minden természetes számra igaz.

Gergely Ervin (Bp. IV., Könyves Kálmán g. IV. o. t.)

II. megoldás: Az adott kifejezést a következő alakban írhatjuk:

$$\begin{aligned}
&nx^{n+1}-nx^{n}-x^{n}+1=nx^{n}(x-1)-(x^{n}-1)=\\
&=(x-1)\left[nx^{n}-(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1)\right]=\\
&=(x-1)\left[(x^{n}-x^{n-1})+(x^{n}-x^{n-2})+\ldots+(x^{n}-x)+(x^{n}-1)\right].
\end{aligned}$$

A szögletes zárójelben levő minden különbség osztható $(x-1)$-gyel, tehát a kifejezésből kiemelhető $(x-1)^2$. (Erre abból is következtethettünk volna, hogy a szögletes zárójelben levő kifejezés az $x=1$ helyen 0-vá válik.)

Bartók Károly (Székesfehérvár, József A. g. IV. o. t.)