

I. megoldás: Legyen a tetraéder köbtartalma K , felszíne F , a beírt gömb sugara ϱ , a lapokhoz tartozó testmagasságok rendre m_1, m_2, m_3, m_4 , akkor (mivel a gúla síkmetszeteinek területei úgy aránylanak, mint a gúla csúcspontjától a metszősíkokig mért távolságok négyzete):

$$S = \frac{(m_1 - 2\varrho)^2}{m_1^2} + \frac{(m_2 - 2\varrho)^2}{m_2^2} + \frac{(m_3 - 2\varrho)^2}{m_3^2} + \frac{(m_4 - 2\varrho)^2}{m_4^2} =$$

$$= 4 - 4\varrho \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4} \right) + 4\varrho^2 \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} + \frac{1}{m_3^2} + \frac{1}{m_4^2} \right).$$

De

$$t_i m_i = 3K = F\varrho, \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

ahonnan

$$\frac{1}{m_i} = \frac{t_i}{F\varrho}, \quad \frac{1}{m_i^2} = \frac{t_i^2}{F^2\varrho^2},$$

tehát

$$S = 4 - 4\varrho \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4}{F\varrho} + 4\varrho^2 \frac{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2}{F^2\varrho^2} =$$

$$= 4 - 4\frac{F}{F} + \frac{4(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2)}{F^2} = \frac{4(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2)}{(t_1 + t_2 + t_3 + t_4)^2}.$$

Bebizonyítjuk, hogy itt a számláló legalább akkora, mint a nevező. Mivel

$$(1) \quad (t_1 - t_2)^2 + (t_1 - t_3)^2 + (t_1 - t_4)^2 + (t_2 - t_3)^2 + (t_2 - t_4)^2 + (t_3 - t_4)^2 \geq 0,$$

így

$$3(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2) \geq 2(t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_1 t_4 + t_2 t_3 + t_2 t_4 + t_3 t_4).$$

Mindkét oldalhoz $(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2)$ -et hozzáadva

$$4(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2) \geq (t_1 + t_2 + t_3 + t_4)^2,$$

azaz tényleg

$$S = \frac{4(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2)}{(t_1 + t_2 + t_3 + t_4)^2} \geq 1.$$

Egyenlőség jele akkor és csakis akkor érvényes (1) szerint, ha

$$t_1 = t_2 = t_3 = t_4.$$

Ebből azonban nem következik, hogy a tetraéder szabályos, elégséges feltétel már az is, hogy a körülírt gömb és a beírt gömb középpontjai azonosak, amikor is – mint ismeretes (ld. K. M. L. 592. feladat, IX. kötet 111. oldal) – a tetraéder négy lapja egybevágó.

Kristóf László (Mosonmagyaróvár, Kossuth g. III. o. t.)

II. megoldás: Bebizonyítjuk a feladatnál általánosabban a következőt: legyen a $P_1 P_2 P_3 P_4$ tetraéder egy belső pontja O . Az O pontra vonatkozó tükörképe a $Q_1 Q_2 Q_3 Q_4$ tetraéder. Ez utóbbi tetraéder síkjai messék ki az előbbi tetraéderből rendre a $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ területű háromszögeket, amelyeket $B_1 C_1 D_1, A_2 C_2 D_2, A_3 B_3 D_3$ és $A_4 B_4 C_4$ -gyel jelölünk (lásd az ábrát). A $C_2 D_2, B_3 D_3$ és $B_4 C_4$ egyenesek határolta $B'_1 C'_1 D'_1$ háromszög a $B_1 C_1 D_1$ háromszög tükörképe. A háromszög területét ugyanúgy jelölve, mint a háromszögeket:

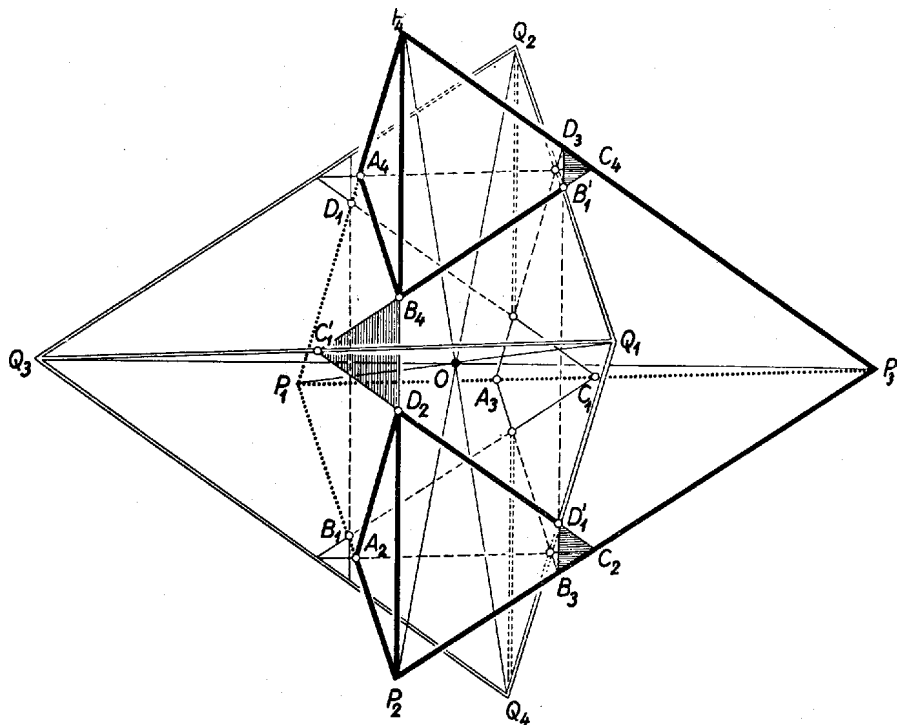
$$S = \frac{\tau_1}{t_1} + \frac{\tau_2}{t_2} + \frac{\tau_3}{t_3} + \frac{\tau_4}{t_4} = \frac{B'_1 C'_1 D'_1}{t_1} + \frac{A_2 C_2 D_2}{t_2} + \frac{A_3 B_3 D_3}{t_3} + \frac{A_4 B_4 C_4}{t_4}.$$

A levágott tetraéderek mind hasonlóak az eredetihez, azért

$$\frac{A_2 C_2 D_2}{t_2} = \frac{P_2 C_2 D_2}{t_1}, \quad \frac{A_3 B_3 D_3}{t_3} = \frac{P_3 B_3 D_3}{t_1}, \quad \frac{A_4 B_4 C_4}{t_4} = \frac{P_4 B_4 C_4}{t_1},$$

és így

$$S = \frac{B'_1 C'_1 D'_1 + P_2 C_2 D_2 + P_3 B_3 D_3 + P_4 B_4 C_4}{t_1}.$$



E tört számlálójában szereplő háromszögek azonban fedik a t_1 -et, sőt – azonfelül – egyes részeket kétszeresen fedhetnek (pl. az ábrában a vízszintesen srafozott két háromszög), vagy túlnyúlhatnak (az ábrában a függőlegesen srafozott háromszög). Tehát tényleg

$$S \geq 1.$$

Ha a Q_1 a tetraéder belsejében van, akkor a $B'_1C'_1D'_1$ háromszöget tartalmazza a másik három háromszög, és így még $\frac{4}{3}$ -nál sem lehet kisebb az S összeg.

Mivel a $B'_1C'_1D'_1$ Δ oldalai párhuzamosak a $P_1P_2P_3$ Δ oldalaival, azért egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha a $B_1C_1D_1$ pontok élfelező pontok, vagyis O súlypont. A feladat feltételei mellett tehát S értéke akkor 1, ha a beírt gömb középpontja egybeesik a súlyponttal. Mivel a súlypont távolsága az egyes oldallapoktól az oldallaphoz tartozó testmagasság negyedrésze, így a beírt gömb középpontja akkor és csak akkor esik egybe a súlyponttal, ha a négy testmagasság, és így a négy oldallap területe is egyenlő. Ezzel éppen az I. megoldás feltételéhez jutottunk.

Németh József (Esztergom, Ferences g. III. o. t.)