

I. megoldás: Mivel a logaritmus alapja pozitív, azért kell, hogy

$$(1) \quad \pm 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} \pm 2k\pi \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Térjünk a 10 alapú logaritmusra.

Az előbbi feladat I. megoldásában bebizonyított

$$\log x = \frac{\log x}{\log a}$$

azonosság alapján egyenletünk így írható:

$$(2) \quad \frac{\lg \sin x}{\lg \cos x} + \frac{\lg \cos x}{\lg \sin x} = 2,$$

vagyis, mivel az (1)-nek megfelelő x értékekre a nevezők nem tűnnek el

$$(\lg \sin x)^2 + (\lg \cos x)^2 = 2(\lg \sin x)(\lg \cos x),$$

és így

$$(\lg \sin x - \lg \cos x)^2 = 0,$$

amiből

$$\lg \sin x - \lg \cos x = 0, \quad \text{vagyis} \quad \sin x = \cos x,$$

ahonnan (1) figyelembevételével

$$x = \frac{\pi}{4} \pm 2k\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Frivaldszky Sándor (Bp. II., Rákóczi g. IV. o. t.)

II. megoldás: Ha $\log v = z$, akkor $u^z = v$, vagyis $u = v^{\frac{1}{z}}$, és így $\frac{1}{z} = \log u$, amiből

$$z = \frac{1}{\log u}.$$

Ezt az átalakítást alkalmazva a baloldal második tagjára:

$$\log \sin x + \frac{1}{\log \sin x} = 2.$$

Ez $\log \sin x$ -re másodfokú egyenlet. Rendezve

$$(\log \sin x - 1)^2 = 0,$$

amiből

$$\log \sin x = 1, \quad \text{vagyis} \quad \sin x = \cos x.$$

Ebből felhasználva, hogy itt $\sin x > 0$, $\cos x > 0$ tartozik lenni,

$$x = (8k + 1)\frac{\pi}{4} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

III. megoldás: Egyenletünket a következő fogással alakítjuk át:

$$\log \sin x + \log \cos x = 2 = 1 + 1 = \log \cos x + \log \sin x.$$

Átrendezve

$$\log \sin x - \log \cos x = \log \sin x - \log \cos x,$$

azaz

$$\log \frac{\sin x}{\cos x} = \log \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Ez pedig akkor igaz, ha vagy az alapok egyenlőek, vagy a logaritmálandó mennyiség értéke 1. Mindkét esetben tehát

$$\sin x = \cos x.$$

Ádám Antal (Bp. VIII., Széchenyi g. IV. o. t.)