

I. megoldás: Az azonosságok csak pozitív valós számokra vannak értelmezve. Kikötés: $a, b \neq 1$.

Ha $\log_a x = p$, ez azt jelenti, hogy $a^p = x$, és így $p \log a = \log x$, vagyis

$$p = \frac{\log x}{\log a}, \quad \text{azaz} \quad \log_a x = \frac{\log x}{\log a}.$$

Ezt x helyett y -nél is alkalmazva

$$\frac{\log x}{\log y} = \frac{\log x}{\log a} : \frac{\log y}{\log a} = \frac{\log x}{\log y},$$

ami bizonyítandó volt.

2) Fentebb láttuk, hogy

$$\log_{a^b} c = \frac{\log c}{\log a^b} = \frac{\log c}{b \log a} = \frac{\log c}{b},$$

de éppen ezt kellett bizonyítani.

Abos András (Bp. VIII., Vörösmarty g. IV. o. t.)

II. megoldás: 1) Ha a baloldalt A -val jelöljük, akkor

$$\log_a x = A \log_a y = \log_a y^A,$$

vagyis

$$x = y^A.$$

Vegyük mindkét oldal b alapú logaritmusát:

$$\log_b x = A \log_b y, \quad \text{amiből} \quad A = \frac{\log_b x}{\log_b y},$$

ami bizonyítandó volt.

2) Legyen $\log_a c = x$, akkor

$$c = a^{bx}.$$

Mindkét oldal a alapú logaritmusát véve:

$$\log_a c = bx, \quad \text{amiből} \quad x = \frac{\log_a c}{b}.$$

Borsi László (Bp. II., Rákóczi g. IV. o. t.)