I. megoldás: Mindenekelőtt fel kell tennünk, hogy $a > 0$ és $b > 0$, mert különben az általános $a^{\frac{1}{2}+r}$ stb. hatványoknak esetleg nem volna értelme.

a) Elég azt az egyenlőtlenséget bizonyítani, amely a bizonyítandó $f(r) \leq (ab)^r$ egyenlőtlenségből keletkezik, ha $(a^{\frac{1}{2}-r} + b^{\frac{1}{2}-r})$-rel szorozzuk, mivel ez szükségképpen pozitív.

$$a^{\frac{1}{2}+r} + b^{\frac{1}{2}+r} \leq a^{\frac{1}{2}}b^r + a^r b^{\frac{1}{2}},$$

vagyis

$$a^{\frac{1}{2}+r} + b^{\frac{1}{2}+r} - a^{\frac{1}{2}}b^r - a^r b^{\frac{1}{2}} \leq 0,$$

ami így is írható:

$$(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})(a^r - b^r) \leq 0.$$

Ez az egyenlőtlenség pedig helyes, mert $r < 0$ miatt $a^{\frac{1}{2}} > b^{\frac{1}{2}}$ esetén $a^r < b^r$ és fordítva, így szorzatunk (ha $a \neq b$) mindig negatív.

Az utolsó egyenlőtlenség helyességéből a bizonyítandó egyenlőtlenség helyessége is következik, mert a végzett átalakítások visszafelé is elvégezhetők.

b) Az előzőkhöz hasonló átalakításokkal az $f(r) \geq (ab)^r$ egyenlőtlenség

$$(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})(a^r - b^r) \geq 0$$

alakra hozható. Ez pedig nyilván helyes, mert $r > 0$ miatt a két tényező előjele megegyezik.

Mindkét esetben akkor áll fenn az egyenlőség, ha $a = b$.

Kristóf László (Mosonmagyaróvár, Kossuth g. II. o. t.)

II. megoldás: Mivel a feladatban a-nak és b-nek általános kitevőre való hatványozása szerepel, eleve fel kell tennünk, hogy $a > 0$, $b > 0$.

Az általánosság megszorítása nélkül választhatjuk a betűzést úgy, hogy $0 < a^{2r} \leq b^{2r}$ legyen. Súlyozzuk a^{2r}-t és b^{2r}-t az $m = a^{\frac{1}{2}-r}$ ill. $n = b^{\frac{1}{2}-r}$, majd az $M = b^r$ ill. $N = a^r$ súlyokkal, és használjuk fel a „Súlyozott számtani közepekről” c. cikkben bebizonyított tételt (K. M. L. 1956 áprilisi számában a 98. oldalon). Ekkor $r < 0$ esetén $a \geq b$, tehát

$$a^{\frac{1}{2}} \geq b^{\frac{1}{2}}.$$

Mindkét oldal a pozitív $a^r \cdot b^{\frac{1}{2}-r}$-rel osztva,

$$\frac{a^{\frac{1}{2}-r}}{b^{\frac{1}{2}-r}} \geq \frac{b^r}{a^r}, \quad \text{azaz} \quad \frac{m}{n} \geq \frac{M}{N}.$$

Tehát $r < 0$ esetén

$$\frac{a^{\frac{1}{2}-r}a^{2r} + b^{\frac{1}{2}-r}b^{2r}}{a^{\frac{1}{2}-r} + b^{\frac{1}{2}-r}} \leq \frac{b^r a^{2r} + a^r b^{2r}}{a^r + b^r} = \frac{a^r b^r (a^r + b^r)}{a^r + b^r},$$

azaz

$$\frac{a^{\frac{1}{2}+r} + b^{\frac{1}{2}+r}}{a^{\frac{1}{2}-r} + b^{\frac{1}{2}-r}} \leq (ab)^r.$$

Ugyanígy $r > 0$ esetén $a \geq b$ tehát $\dfrac{m}{n} \leq \dfrac{M}{N}$ áll fenn, amiből

$$\frac{a^{\frac{1}{2}+r} + b^{\frac{1}{2}+r}}{a^{\frac{1}{2}-r} + b^{\frac{1}{2}-r}} \geq (ab)^r$$

következik.

Schipp Ferenc (Mohács, Kisfaludy K. g. III. o. t.)