

Jelöljük az adott gömb középpontját O -val. Tekintsünk egy megfelelő P pontot, és azon átmenő három, egymásra páronként merőleges érintő síkot. Ezen érintő síkok mindegyikével párhuzamos érintő síkot fektetve a gömbhöz, egy, a gömb köré írt, $2r$ élhosszúságú kockához jutunk. E kocka minden csúcspontja megfelel a feladat követelményeinek. E csúcspontok, és így a feltételt kielégítő összes pontok, rajta vannak azon az adott gömbbel koncentrikus $\mathbf{G}$ gömbfelületen, amelynek sugara OP , a kocka testátlójának fele, vagyis $OP = r\sqrt{3}$. Egy ilyen kockát O körül forgatva a $\mathbf{G}$ gömbfelület bármely pontjába elforgatható a kocka egyik csúcspontja (s közben a többi csúcs is a $\mathbf{G}$ felületén mozog), vagyis $\mathbf{G}$ minden pontja megfelelő pont. Tehát a P pontok keresett mértani helye a $\mathbf{G}$ gömbfelület.

a) Az adott r sugarú gömbön levő érintési pontok szabályos háromszöget alkotnak, melynek oldala két szomszédos kockalap középpontjának egymástól való távolsága: $r\sqrt{2}$. Mivel egy a oldalú szabályos háromszög köré írt kör sugara $\frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} \sqrt{3} = \frac{a}{3} \sqrt{3}$, azért a k kör sugara

$$\varrho = \frac{1}{3} r \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{r\sqrt{6}}{3}.$$

A gömbsüveg felszíne

$$F_1 = 2r\pi m = 2r\pi(r - \sqrt{r^2 - \varrho^2}) = \frac{2(3 - \sqrt{3})}{3} r^2 \pi.$$

b) A kúp alkotójának hossza az érintési pontok távolsága a P -től, ami nem egyéb, mint a kockalap átlójának a fele: $r\sqrt{2}$. (A három érintési pont és a P pont tehát egy szabályos tetraédernek 4 csúcsa.)

A kúppalást felszíne

$$F_2 = \varrho \pi r \sqrt{2} = \frac{r\sqrt{6}}{3} r \sqrt{2} \pi = \frac{2\sqrt{3}}{3} r^2 \pi.$$

A két felszín aránya

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1.$$

Danassy Károly (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. g. II. o. t.)