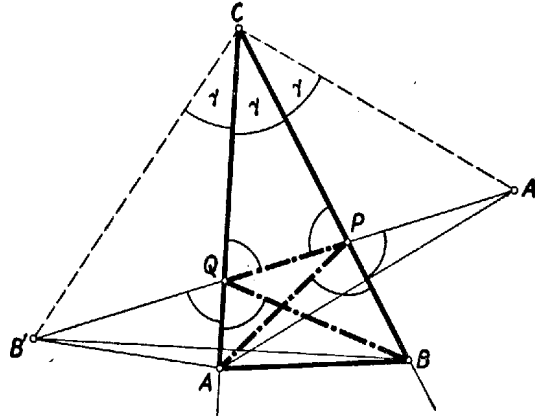


Tekintsük a feladatot megoldottnak. Legyen a mozgó pont pályája $APQB$, ahol P a BC , Q a CA oldalon van; legyen A -nak BC -re vonatkozó tükörképe A' , B -nek CA -ra vonatkozó tükörképe B' . A visszaverődés törvénye szerint $\angle QPC = \angle APB$ és $\angle PQC = \angle BQA$, tehát A' , P , Q , B' egy egyenesbe esik. Ennek alapján a pont útja megszerkeszthető.



A megoldhatóság feltétele az, hogy $A'B'$ mossa mind a BC , mind a CA oldalt (lásd az ábrát).

A háromszög szögeit rendre α , β , γ -val jelölve, ennek első feltétele, hogy az $\angle A'CB' = 3\gamma < 180^\circ$ legyen, vagyis

$$(1) \quad \gamma < 60^\circ.$$

Ha (1) teljesül, akkor $\alpha \equiv 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$ esetén a feladat nyilvánvalóan mindig megoldható.

Ha $\alpha \neq \beta$, akkor – a golyó menetirányának megfordíthatósága miatt – A és B szerepe felcserélhető, és így nem megy az általánosság rovására, ha feltesszük, hogy $\alpha > \beta$, vagyis $CA < CB$. Tehát ha $A'B'$ metszi a CA oldalt, akkor szükségképpen metszi a CB oldalt is.

Az $A'B'$ egyenes – (1) teljesülését feltételezve – akkor és csakis akkor metszi a CA oldalt, ha az

$$\angle A'AB' = \angle A'AC + \alpha = 90^\circ - \gamma + \alpha < 180^\circ,$$

vagyis

$$(2) \quad \alpha < 90^\circ + \gamma.$$

Mivel mindig fennáll, hogy $\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$, vagyis $\alpha < 180^\circ - \gamma$, azért

$$45^\circ < \gamma < 60^\circ$$

esetén (2) mindig teljesül.

Tehát a megoldhatóság feltételeit a következőkben foglalhatjuk össze:

1) Ha

$$45^\circ < \gamma < 60^\circ,$$

akkor a feladat mindig megoldható.

2) Ha

$$\gamma \leq 45^\circ,$$

akkor még szükséges és elégséges a megoldhatósághoz, hogy ($\alpha > \beta$ esetén)

$$\alpha < 90^\circ + \gamma.$$

A $\gamma = 60^\circ$ és $\gamma < 45^\circ$, $\alpha = 90^\circ + \gamma$ határesetekben a golyónak a feladat értelmében követelt visszaverődéseiről nem lehet beszélni.