

**I. megoldás:** Ismeretes, hogy a számtani közép nem lehet kisebb a mértaninál, ezért

$$(1) \quad \frac{1}{3} \left( \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} \right) \geq \\ \geq \sqrt[3]{\frac{1}{x+y} \cdot \frac{1}{y+z} \cdot \frac{1}{z+x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)}}.$$

Viszont ugyanannak a tételnek felhasználásával

$$(2) \quad \sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)} \leq \frac{(x+y) + (y+z) + (z+x)}{3} = \frac{2}{3}(x+y+z).$$

(1)-ben a jobboldal nevezőjében a (2) alatti nagyobb értéket írva, (1) jobb oldalát még inkább kisebbítjük, vagyis

$$(3) \quad \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} \geq \frac{9}{2(x+y+z)}.$$

Mindkét oldalt a pozitív  $(x+y+z)$ -vel szorozva

$$1 + \frac{z}{x+y} + 1 + \frac{x}{y+z} + 1 + \frac{y}{z+x} \geq \frac{9}{2},$$

vagyis

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2},$$

ami bizonyítandó volt.

*Kolonits Ferenc (Bp. VIII., Piarista g. I. o. t.)*

**II. megoldás:** Jelöljük az egyenlőtlenség baloldalát  $B$ -vel, az  $y+z$ ,  $z+x$ ,  $x+y$  kifejezéseket  $a$ ,  $b$ ,  $c$ -vel, ekkor a második és harmadik kifejezés összegéből az elsőt levonva nyerjük, hogy

$$b+c-a=2x, \quad \text{azaz} \quad x = \frac{1}{2}(b+c-a).$$

Hasonlóan

$$y = \frac{1}{2}(c+a-b), \quad z = \frac{1}{2}(a+b-c).$$

Ezeket  $B$ -be helyettesítve

$$B = \frac{1}{2} \left( \frac{b+c-a}{a} + \frac{c+a-b}{b} + \frac{a+b-c}{c} \right) = \\ = \frac{1}{2} \left( \frac{b}{a} + \frac{c}{a} - 1 + \frac{c}{b} + \frac{a}{b} - 1 + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} - 1 \right) = \\ = \frac{1}{2} \left( \frac{b}{a} + \frac{a}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{c} - 3 \right) \geq \\ \geq \frac{1}{2}(2+2+2-3) = \frac{3}{2},$$

mert általában, ha  $u > 0$ , akkor

$$u + \frac{1}{u} = \frac{u^2+1}{u} = \frac{(u-1)^2+2u}{u} = \frac{(u-1)^2}{u} + 2 \geq 2.$$

*Ványai László (Sátoraljaújhely, Kossuth g. IV. o. t.)*