I. megoldás: Ha PQ minimális, akkor Q környezetében levő minden Q' pontra nézve $PQ' > PQ$, vagyis a P középpontú és PQ sugarú kör Q-ban érinti a parabolát, és így a P pont rajta van a Q ponthoz tartozó normálison.

A P középpontú körök a parabolát általában 4 pontban metszik. Keressük e körök közül azt, amely a parabolát két pontban érinti. Mivel az x tengely szimmetria tengely, azért a két érintkezési pont abszcisszája közös.

A parabola egyenlete

(1) $$y^2 = 2px.$$

A $P(3p,\, 0)$ középpontú és r sugarú kör egyenlete

(2) $$(x-3p)^2 + y^2 = r^2.$$

A metszéspontokra nézve fennáll a (2) és (1) egyenlet, amiből

$$(x-3p)^2 = r^2 - 2px,$$

adódik, vagyis rendezve

(3) $$x^2 - 4px + 9p^2 - r^2 = 0.$$

A metszéspontok abszcisszái, akkor egyenlők, ha a (3) másodfokú egyenlet diszkriminánsa $D = 0$, vagyis

$$D = 16p^2 - 4(9p^2 - r^2) = 0,$$

ahonnan

$$r^2 = 5p^2.$$

Mivel ez esetben az elsőfokú tag együtthatója a gyök (-2)-szerese, azért

$$x_{1,2} = 2p, \quad \text{és így (1)-ből} \quad y = \pm 2p.$$

A feladat követelményeinek tehát két pont felel meg: Q_1 $(2p,\, 2p)$ és Q_2 $(2p,\, -2p)$.

Krix Eleonóra (Baja, III. Béla g. III. o. t.)

II. megoldás: A parabola $(x_1,\, y_1)$ pontjában az érintő egyenlete

$$y_1 y = p(x + x_1), \quad \text{vagyis} \quad y = \frac{p}{y_1}(x + x_1).$$

Az $(x_1,\, y_1)$ ponton átmenő, és az érintőre merőleges, normális egyenlete tehát

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1).$$

A keresett Q $(x_1,\, y_1)$ ponthoz tartozó normális – mint az I. megoldásban láttuk – átmegy a P $(3p,\, 0)$ ponton, és így

$$0 - y_1 = -\frac{y_1}{p}(3p - x_1), \text{ vagyis rendezve } y_1(2p - x_1) = 0.$$

Ez az egyenlet vagy úgy állhat fenn, hogy $y_1 = 0$, vagy pedig úgy, hogy $2p - x_1 = 0$. Az $y_1 = 0$ ordinátájú parabola pont a parabola csúcspontja, mely P-től nem minimális, hanem a közeli pontokhoz képest maximális távolságban fekszik (a görbének a csúcspont környezetében fekvő pontjai közelebb vannak P-hez, mint a csúcspont). A $2p - x_1 = 0$ feltétel az $x_1 = 2p$ abszcisszájú parabola pontra áll fenn, ami megegyezik az I. megoldásban nyert eredménnyel.

Fillinger László (Bp., I., Toldy F. g. III. o. t.)

III. megoldás: Legyen Q $(x,\, y)$ a parabola tetszőleges pontja. Ennek távolsága P-től

$$PQ = \sqrt{(3p-x)^2 + y^2} = \sqrt{(3p-x)^2 + 2px},$$

ahol a négyzetgyökjel alatt y^2 helyébe $2px$-et helyettesíthettünk, minthogy a Q pont rajta van a parabolán, és így koordinátái kielégítik a parabola egyenletét. A gyökjel alatti kifejezést átalakítva

$$PQ = \sqrt{(x-2p)^2 + 5p^2}.$$

A jobboldalon a gyökjel alatt mind a két tag négyzetszám, tehát pozitív és $5p^2$ konstans. Így a kifejezés értéke akkor minimális, ha $(x-2p)^2$ a lehető legkisebb. $(x-2p)^2$ lehető legkisebb értéke 0, amit a kifejezés az $x = 2p$ helyen fel is vesz. Ez az eredmény egyezik az előzőkkel. PQ minimális értéke $p\sqrt{5}$.

Pödör Bálint (Bp., II., Rákóczi g. II. o. t.)