

Írjunk minden számlálóba k ($k = 1, 2, \dots, n$) helyébe $(k+1) - 1$ -et, és rendezzük a tagokat következőképpen:

$$s_n = \left(\frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{3}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{n+1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right) - \left(\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right).$$

Az első zárójeles összeg egyszerűsítés után így alakítható:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(n+2)(n+3)} &= \frac{4-3}{3 \cdot 4} + \frac{5-4}{4 \cdot 5} + \dots + \\ + \frac{(n+3) - (n+2)}{(n+2)(n+3)} &= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) = \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{n+3} = \frac{n}{3(n+3)}. \end{aligned}$$

A második összeget is átalakíthatjuk:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{4-3}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{3-2}{2 \cdot 3 \cdot 4} \right) + \left(\frac{5-4}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{4-3}{3 \cdot 4 \cdot 5} \right) + \dots + \right. \\ \left. + \left(\frac{(n+3) - (n+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{(n+2) - (n+1)}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right) \right] &= \\ = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+2)(n+3)} \right] &= \\ = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{(n+2)(n+3)} \right] &= \frac{n^2 + 5n}{12(n+2)(n+3)}. \end{aligned}$$

Tehát

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{n}{3(n+3)} - \frac{n^2 + 5n}{12(n+2)(n+3)} = \frac{4n(n+2) - (n^2 + 5n)}{12(n+2)(n+3)} = \\ &= \frac{3n^2 + 3n}{12(n+2)(n+3)} = \frac{n(n+1)}{4(n+2)(n+3)}. \end{aligned}$$

Beke Gyula (Hatvan, Bajza g. IV. o. t.)

Megjegyzés: Az

$$s_n = \frac{n(n+1)}{4(n+2)(n+3)}$$

képlet $n = 1$ esetén helyes $\left(s_1 = \frac{1}{24} \right)$, általános érvényessége teljes indukcióval könnyen bizonyítható.