

I. megoldás: Meghatározott k (és csakis k) találat valószínűsége

$$\left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{12-k} \quad \text{ahol } k = 0, 1, 2, \dots, 12.$$

Mivel k találat 12-ből $\binom{12}{k}$ -féleképpen jöhet létre, azért pontosan k találat (akármilyen sorrendben) valószínűsége

$$v_k = \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{12-k} \binom{12}{k} = \frac{1}{3^{12}} \cdot \binom{12}{k} 2^{12-k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 12).$$

A találatok várható száma tehát

$$\begin{aligned} M &= 0 \cdot v_0 + 1 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + \dots + 11 \cdot v_{11} + 12 \cdot v_{12} = \\ &= \frac{1}{3^{12}} \left[1 \cdot \binom{12}{1} 2^{11} + 2 \binom{12}{2} 2^{10} + \dots + 10 \binom{12}{10} 2^2 + 11 \cdot \binom{12}{11} 2 + 12 \binom{12}{12} 2^0 \right] = \\ &= \frac{1}{3^{12}} [24\,576 + 135\,168 + 337\,920 + 506\,880 + 506\,880 + 354\,816 + 177\,408 + \\ &\quad + 63\,360 + 15\,840 + 2\,640 + 254 + 12] = \frac{2\,125\,764}{531\,441} = 4. \end{aligned}$$

Rockenbauer Antal (Bp., X., I. László g. II. o. t.)

II. megoldás: Minden numerikus számítás nélkül is célhoz érhetünk, ha felhasználjuk a binomiális tételt.

$$\begin{aligned} v_k &= \binom{12}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{12-k} = \frac{12!}{k!(12-k)!} \left(\frac{2}{3}\right)^{12-k} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \\ &= \frac{12 \cdot 11!}{k(k-1)! [11 - (k-1)]!} \left(\frac{2}{3}\right)^{11-(k-1)} \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}. \end{aligned}$$

Ebből

$$kv_k = 12 \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{11}{k-1}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^{11-(k-1)} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots, 12).$$

Tehát

$$\begin{aligned} M &= 4 \left[\binom{11}{0} \left(\frac{2}{3}\right)^{11} + \binom{11}{1} \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \frac{1}{3} + \binom{11}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^9 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \binom{10}{10} \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{10} + \binom{11}{11} \left(\frac{1}{3}\right)^{11} \right] = \\ &= 4 \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)^{11} = 4. \end{aligned}$$

Megjegyzés: Ez a megoldás könnyen általánosítható 12 helyett n -re, és $\frac{1}{3}$ helyett v -re, amikor is M -re

$$M = nv [(1-v) + v]^{n-1} = nv$$

adódik.

Zsombok Zoltán (Bp., IV., Könyves Kálmán g. IV. o. t.)