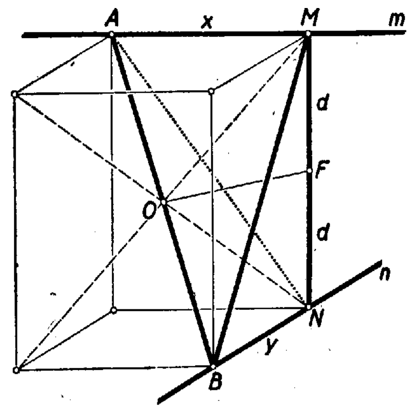
Egészítsük ki az $MABN$ tetraédert hasábbá, mint az az ábrán látható.



Mivel a feltételek szerint $MN \perp MA$, $MN \perp NB$ és $MA \perp NB$, azért a hasáb téglatest, köréje gömb írható, amely megegyezik az $MABN$ tetraéder köré írt gömbbel, hiszen négy különböző pont, amelyek nincsenek egy síkban, egy és csakis egy gömböt határoznak meg. A keresett gömb középpontja tehát a téglatest testátlóinak közös felezőpontja. Az egyik átló AB. Pythagoras tételének kétszeres felhasználásával

$$AB = \sqrt{x^2 + (2d)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 4d^2}.$$

A keresett gömb középpontja tehát az AB szakasz O felezőpontja és sugara

$$OA = OM = ON = OB = \frac{AB}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2 + 4d^2}.$$

Mivel $OM = ON$, azért az O pont benne van az MN szakaszt merőlegesen felező síkban, amely a MN szakaszt az F felezőpontjában metszi.

a) Ha a gömb sugara állandóan $2d$, vagyis

$$AO = OM = 2d,$$

akkor az OFM derékszögű háromszögben

$$OF = \sqrt{OM^2 + MF^2} = \sqrt{4d - d^2} = d\sqrt{3},$$

vagyis az O pontok rajta vannak egy olyan körön, amelynek síkja merőlegesen felezi a MN szakaszt, középpontja az F pont, és sugara $d\sqrt{3}$, s mivel megfordítva e kör minden pontja lehet egy megfelelő gömb középpontja, azért a fenti kör az O pontok mértani helye.

b) Ha $x = y$, akkor az O pontok távolsága az $[AMN]$ síktól $\left(\frac{y}{2}\right)$ ugyanakkora, mint a $[BMN]$ síktól $\left(\frac{x}{2}\right)$, vagyis az O pontok benne vannak e két sík szögfelező síkjaiban. Az előbbiek alapján tehát az O pontok rajta vannak a MN szakaszt merőlegesen felező sík és e két szögfelező sík metszésvonalán. Ez a két metszésvonal egyúttal az O pontok mértani helye, mert ezen egyenesek bármely pontja lehet O pont.

Megjegyzés: Mindkét mértani hely könnyen általánosítható arra az esetre, *a)* mikor a gömb sugara $r =$ állandó $(> d)$ és *b)*, amikor $x = ky$, ahol k állandó.

Harza Tibor (Székesfehérvár, József A. g. IV. o. t.)