

I. megoldás: A két 5-nél nagyobb prímszám nem lehet x és y , mert ekkor $x^2 + y^2 = 4k + 2$ alakú volna, ilyen alakú négyzetszám azonban nincs, mert ha egy négyzetszám páros, akkor az páros szám négyzete, és mint ilyen 4-gyel osztható.

Az egyik prímszám tehát z , a másik legyen y . Be kell bizonyítani, hogy x osztható $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ -nal. Mivel 3, 4, 5 egymáshoz relatív prím számok, azért elég megmutatni, hogy x osztható 3-mal, 4-gyel és 5-tel.

z és y , mivel 5-nél nagyobb prím számok, csak $3k \pm 1$ alakúak lehetnek. Ekkor azonban $x^2 = z^2 - y^2$ $3K$ alakú, tehát x^2 , és így x is osztható 3-mal.

Ugyanígy z és y csak $8m \pm 1$ vagy $8m \pm 3$ alakúak lehetnek. Minden esetben $x^2 = z^2 - y^2 = 8M$ alakú, ami csak úgy lehetséges, ha x osztható 4-gyel.

z^2 és y^2 5-tel osztva vagy ± 1 -et vagy ± 2 -t ad maradékul. Ha y $5r \pm 1$, z pedig $5r \pm 2$ alakú volna, vagy fordítva, akkor $x^2 = z^2 - y^2$ $5R \pm 2$ alakú lenne. Azonban $5r$ alakú számok négyzete $5R$ alakú, $5r \pm 1$ alakúaké $5R + 1$, $5r \pm 2$ alakúaké pedig $5R - 1$ alakú; tehát $5R \pm 2$ alakú négyzetszám nincs. Ebből következik, hogy z és y vagy mindkettő $5r \pm 1$, vagy mindkettő $5r \pm 2$ alakú. Ekkor azonban $x^2 = z^2 - y^2$ $5R$ alakú, tehát x osztható 5-tel.

Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

Csiszár Imre (Bp., I., Petőfi g. IV. o. t.)

II. megoldás: Az (1) egyenletnek eleget tevő pythagoraszi számok a következőképpen írhatók fel (lásd Rademacher–Toeplitz: „Számokról és alakzatokról” c. szakköri füzet – Tankönyvkiadó 1953. – 88. old.):

$$\begin{aligned}x &= 2uv \\y &= u^2 - v^2 \\z &= u^2 + v^2,\end{aligned}$$

ahol u és v különböző párosságú, egymáshoz relatív prím egészek. x nem lehet törzsszám, mert $2uv$ mindig páros, sőt mivel u és v egyike páros. $2uv = x$ 4-gyel is osztható.

u és v 3-mal való oszthatóság szempontjából $3k$ vagy $3k \pm 1$ alakú. Ha mindkettő $3k \pm 1$ alakú volna, akkor $u^2 - v^2 = y$ osztható volna 3-mal, ami lehetetlen, mert y prím és 3-nál nagyobb, így tehát u és v egyike $3k$ alakú, amiből következik, hogy x osztható 3-mal.

Ha u és v közül egyik sem $5k$ alakú, akkor csak $5k \pm 1$, ill. $5k \pm 2$ alakúak lehetnek. Ha egyenlő alakúak, akkor $y = u^2 - v^2$, ha különböző alakúak, akkor $z = u^2 + v^2$ osztható 5-tel, ami ellentmond annak, hogy y és z 5-nél nagyobb prím számok. Tehát u és v közül az egyik 5-tel osztható, és így $x = 2uv$ is osztható 5-tel.

Széphalmi Géza (Bp., VIII., Piarista g. II. o. t.)