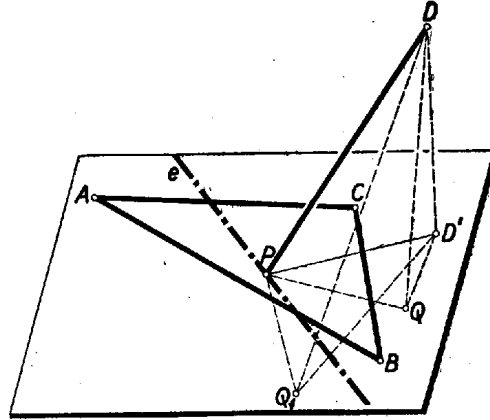


**I. megoldás:** Legyen  $D$  merőleges vetülete:  $D'$  a háromszög síkjában a  $P$ -tól különböző pont. Akkor a  $PD$  félegyenes a  $PD'$  félegyenessel hegyesszöget zár be. Először megmutatjuk, hogy két  $P$ -ből kiinduló síkbeli félegyenes közül az zár be nagyobb szöget a térbeli  $PD$ -vel, amelyik  $PD'$ -vel nagyobb szöget zár be. Vegyünk fel két  $P$ -ből kiinduló tetszőleges félegyenesen egy  $Q$ , illetőleg  $Q_1$  pontot úgy, hogy  $PQ = PQ_1 = PD'$ .



1. ábra

Ha  $QPD' < Q_1PD'$  (1. ábra), akkor  $D'Q < D'Q_1$ , és így a  $QDD'$  és  $Q_1DD'$  derékszögű háromszögekből  $QD < Q_1D$ , következésképpen a  $QDP$  és  $Q_1DP$  háromszögekből

$$QPD < Q_1PD.$$

A  $P$  ponton átmenő,  $DP$ -re merőleges, sík a háromszög síkjából kimetsz egy  $DP$ -re merőleges  $e$  egyenest. Minden  $Q$  pontra nézve, mely az  $e$  egyenesen van a  $QPD = 90^\circ$ , tehát az előbbiekből alapján minden olyan síkban fekvő  $Q$  pontra, amely az  $e$ -nek ugyanarra az oldalára esik, mint  $D'$ ,

$$QPD < 90^\circ,$$

az  $e$  másik oldalára eső  $Q$  pontokra

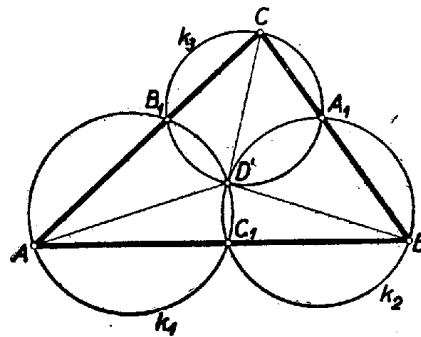
$$QPD > 90^\circ.$$

Mivel  $P$  a háromszögnek egyik belső pontja, azért az  $e$  egyenes a háromszögnek legalább egy csúcsát (az 1. ábrában az  $A$ -t) elválasztja  $D'$ -től és egyszer-smind legalább egy másik csúcsától.

*Megjegyzés:* Ha  $P \equiv D'$ , akkor mind a három szög derékszög, tehát akkor feladatunk értelmét veszti.

Daróczy Zoltán (Debrecen, Ref. g. IV. o. t.)

**II. megoldás:** Tekintsük az  $AD$ ,  $BD$  és  $CD$  átmérőjű  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$  gömböket. Thales tétele értelmében az  $APD$  tompa-, derék-, illetve hegyesszög, aszerint, amint  $P$  a  $G_1$ -n belül, a  $G_1$ -en rajta, ill. a  $G_1$ -en kívül van. Hasonló megállapítások érvényesek a másik két szögre és a másik két gömbre vonatkozólag. Háromszögünk síkja a három gömbből kimetszi rendre a  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  köröket (2. ábra), melyeknek átmérőjük a gömbátmérőknek vetületei:  $AD'$ ,  $BD'$ ,  $CD'$ .



2. ábra

A három kör mindegyike tehát átmegy a  $D'$  ponton, és 2-2 kör második metszéspontja ( $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ) a Thales tétele alapján rajta van egy-egy háromszögoldalán (vagy annak meghosszabbításán, ha  $D'$  a háromszögon kívül van).

A három kör együtt tehát mindig teljesen lefedi a háromszöget. A háromszög belsejében fekvő minden,  $D'$ -től különböző,  $P$  pont tehát legalább egy körön belül van, és ugyanakkor legalább egy körön kívül van, de akkor ugyanez áll a  $P$  pontra és a körökhöz tartozó gömbökre is. Ezzel tételünket bebizonyítottuk.

Csiszár Imre (Bp., I., Petőfi g. IV. o. t.)