I. megoldás: A $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ és $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$ ismert összefüggések felhasználásával felírhatjuk a következő azonosságokat:

$$\begin{aligned}
2\sin 12^\circ \cos 12^\circ &= \sin 24^\circ\\
2\sin 24^\circ \cos 24^\circ &= \sin 48^\circ\\
2\sin 36^\circ \cos 36^\circ &= \sin 72^\circ\\
2\sin 48^\circ \cos 48^\circ &= \sin 84^\circ\\
2\sin 60^\circ \cos 60^\circ &= \sin 60^\circ\\
2\sin 72^\circ \cos 72^\circ &= \sin 36^\circ\\
2\sin 84^\circ \cos 84^\circ &= \sin 12^\circ
\end{aligned}$$

A baloldalakat és a jobboldalakat összeszorozva és mindkét oldalt a jobboldalak szorzatával osztva, nyerjük, hogy

$$2^7 \cos 12^\circ \cdot \cos 24^\circ \cdot \cos 36^\circ \cdot \cos 48^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 72^\circ \cdot \cos 84^\circ = 1,$$

ami egyenértékű a bizonyítandó állítással.

Reichmann Róbert (Bp. VIII., Széchenyi g. IV. o. t.)

II. megoldás: Általában bebizonyítjuk, hogy

(1) $$A = \cos x \cos 2x \ldots \cos kx = \frac{1}{2^k},$$

ha

$$x = \frac{180^\circ}{2k+1}.(k = 1,\ 2,\ \ldots)$$

Legyen

(2) $$B = \sin x \sin 2x \ldots \sin kx.$$

(1) és (2) szorzata $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ figyelembevételével

(3) $$AB = \frac{1}{2^k}\sin 2x \sin 4x \ldots \sin 2kx.$$

$$\begin{gathered}
\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha \quad \text{miatt}\\
\sin mx = \sin\left[(2k+1) - m\right]x,
\end{gathered}$$

ahol

$$m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots k.$$

(3) tehát így írható:

(4) $$AB = \frac{1}{2^k}\sin(2k-1)x \cdot \sin(2k-3)x \ldots \sin 3x \cdot \sin x.$$

(3) és (4) szorzata:

$$\begin{aligned}
A^2B^2 &= \frac{1}{2^{2k}}\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x \ldots \sin kx \cdot \sin(k+1)x \ldots \sin 2kx =\\
&= \frac{1}{2^{2k}}\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x \ldots \sin kx \cdot \sin kx \sin(k-1)x \ldots \sin x =\\
&= \frac{1}{2^{2k}}B^2.
\end{aligned}$$

Mivel $B \neq 0$, ezért

$$A^2 = \frac{1}{2^{2k}},$$

és mivel A minden tényezője pozitív, azért

$$A = \frac{1}{2^k},$$

ami bizonyítandó volt.

Feladatunk a most bizonyított általános tételnek speciális esete, amikor $k = 7$.

Zsombok Zoltán (Bp. IV., Könyves Kálmán g. IV. o. t.)