

Ismeretes, hogy bármely (a, b, c) oldalú α, β, γ szögű háromszögben

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{s-a} \quad \text{és} \quad \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{\varrho}{s-b},$$

ahol ϱ a beírt kör sugara, és $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

Tehát

$$(1) \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho^2}{(s-a)(s-c)}.$$

Másrészt tudjuk, hogy a háromszög t területére

$$t = \varrho s,$$

ahonnan

$$\varrho^2 = \frac{t^2}{s^2} = \frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s^2} = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}.$$

ϱ^2 ezen értékét (1)-be helyettesítve

$$(2) \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{s-b}{s}.$$

A feltétel szerint

$$(3) \quad b = \frac{a+c}{2},$$

tehát

$$s-b = \frac{a+b+c}{2} - \frac{a+c}{2} = \frac{b}{2}, \quad s = \frac{a+c}{2} + \frac{b}{2} = \frac{3b}{2}.$$

Ezen értékeket (2)-be helyettesítve

$$(4) \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{3}, \quad \text{ami bizonyítandó volt.}$$

Megjegyzés: (4)-ből (2) felhasználásával ugyanígy visszafelé következtetve (3)-hoz jutunk. Tehát (3) nem csak *elégőséges*, hanem *szükséges* feltétele is a (4) alatti összefüggés fennállásának.

Argay Gyula (Balassagyarmat, Balassi B. g. III. o. t.)