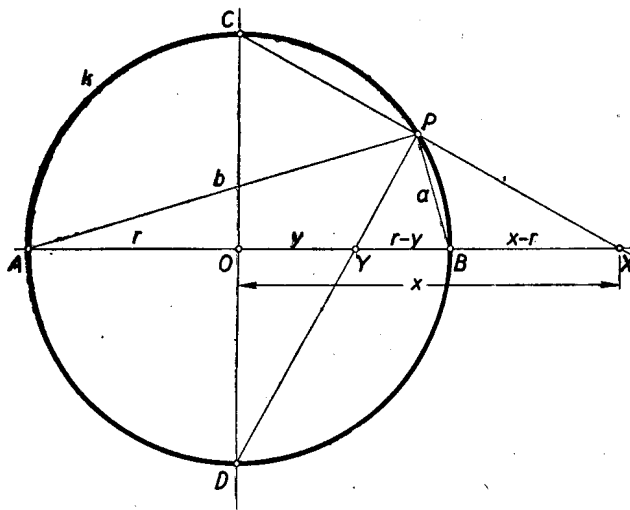


I. megoldás: Legyen P a $\widehat{BC}$ íven. A PD egyenes az ABP háromszög P csúcsához tartozó belső szögfelezője, mert a félkörívhez tartozó (tehát derékszögű) APB kerületi szöget két, egyenként egy-egy negyedkörívhez tartozó (tehát $45^\circ - 45^\circ$ -os) szögre bontja (1. ábra).



1. ábra

Mivel PD felezi az APB szöget és Thales tétele értelmében $PD \perp PC$, így PC felezi az APB mellékszögét, azaz PC az ABP háromszög külső szögfelezője.

Mivel a háromszög bármelyik szögpontjához tartozó belső és külső szögfelező olyan pontokban metszi a szemközti oldalt, amelyeknek az osztóviszonya egyenlő nagyságú, de ellenkező előjelű (Kárteszi: A Menelaos- és Ceva-féle tétel, K. M. L. XI. köt., 3-4. sz. 67. old.), azért

$$(ABY) : (ABX) = \frac{b}{a} : \left(-\frac{b}{a}\right) = -1.$$

Így az $A, B; X, Y$ pontok valóban harmonikus pontnégyest alkotnak.

A pontok mozgásának jellemzése:

Fusson P a $\widehat{BC}$ íven C felé. Ekkor X az AB -nek B -n túli meghosszabbításán fut B -től távolodva, Y pedig BO -n a kör középpontja felé halad.

Ha $P \equiv C$, akkor Y az O -ban van, és a PC egyenes párhuzamos AB -vel, az X metszéspont nem is lép fel, (ABX) -nek nincs értelme.

Ha P továbbhalad a $\widehat{CA}$ íven, akkor az előbbi ábrának a CD átmérőre vonatkozó tükörképét kapjuk. Tükrözéskor az osztóviszony és így a pontnégyes harmonikus volta is változatlanul megmarad. X az AB -nek A -n túli meghosszabbításán közeledik A felé, Y az OA szakaszon közeledik ugyancsak A felé.

Ha $P \equiv A$, akkor $X \equiv A$ és $Y \equiv A$.

Ha P az $\widehat{AD}$ íven D felé halad, akkor az első ábrának az O pontra vonatkozó tükörképét kapjuk. X az A -tól befelé távolodva O felé, Y pedig A -tól kifelé távolodva mozog.

Ha $P \equiv D$, a PD egyenes párhuzamos AB -vel, X az O -ban van, és most az Y metszéspont nem lép fel, vagyis (ABY) -nak nincs értelme.

Ha P a $\widehat{DB}$ íven mozog, akkor az 1. ábra AB -re vonatkozó tükörképét kapjuk. X az O -ból B felé, Y kívülről ugyancsak B felé halad.

Ha P a B -be érkezik, B, X és Y ismét egybeesnek.

Megfigyelhetjük, hogy míg a P pont befutja a teljes kört, addig X is, Y is mindig egy-egy irányban haladva egyszer végigfut az AB egyenesen. X és Y egymáshoz képest mindig ellenkező irányban mozog, és A , ill. B -ben találkoznak. Ha valamelyikük O -ban van, akkor a másik nem lép fel (a „végtelen”-ben van).

Megjegyzés: Ha a k kör sugarát r -rel és az X és Y pontoknak O -tól mért távolságát x és y -nal jelöljük, akkor a $-(ABX) = (ABY)$ így írható:

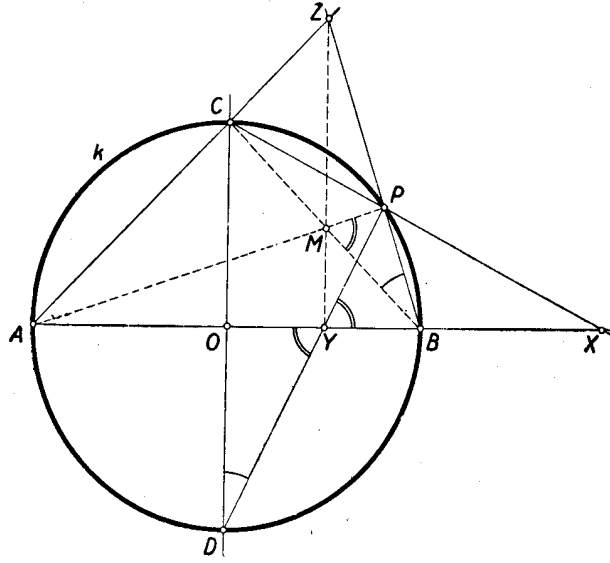
$$\frac{r+x}{x-r} = \frac{r+y}{r-y}$$

amiből

$$xy = r^2, \quad \text{vagyis} \quad \frac{x}{r} = \frac{r}{y}.$$

Ilyenkor azt szoktuk mondani, hogy X az Y pontnak (illetőleg fordítva: Y az X pontnak) *inverze* a k körre vonatkozólag.

II. megoldás: Messe a PB egyenes az AC egyenest a Z pontban (2. ábra).



2. ábra

Az ABZ háromszögben AP és BC magasságvonalak. Így M a háromszög magasságpontja. BPM és DOY háromszögek hasonlóak, mert derékszögűek, és $\angle CBP = \angle CDP$ mint a $\widehat{PC}$ ívhez tartozó kerületi szögek. Ezért $\angle PMB = \angle OYD = \angle PYB$, vagyis $BPMY$ húrnégyszög. De akkor $MY \perp AB$, és mivel M a magasságpont, ezért a ZM és YM egyenesek egybeesnek, tehát ZY az $ABZ\Delta$ harmadik magasságvonala.

Az ABZ háromszögre és az M pontra alkalmazva Ceva tételét:

$$(1) \quad (ABY)(BZP)(ZAC) = 1,$$

az ABZ háromszögre és az XPC egyenesre alkalmazva Menelaos tételét:

$$(2) \quad (ABX)(BZP)(ZAC) = -1.$$

(2) és (1) hányadosa:

$$\frac{(ABX)}{(ABY)} = -1.$$