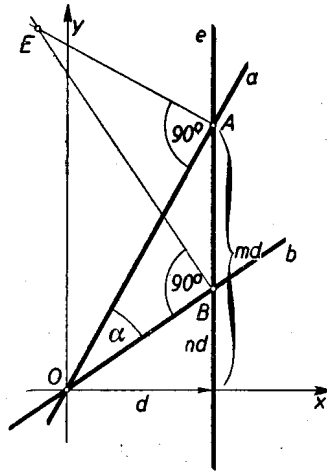


I. megoldás. Jelöljük $\Sigma(a)$ rendszer tengelyeit a -val és b -vel. Válasszuk koordináta-rendszerünk tengelyeit úgy, hogy origója essék egybe a $\Sigma(a)$ rendszer tengelyeinek metszéspontjával, és a rendszer tengelyeit metsző e egyenes legyen merőleges az abszcissa-tengelyre, az origótól $d(\neq 0)$ távolságban. Ebben a koordináta-rendszerben a $\Sigma(a)$ rendszer tengelyeinek egyenlete $y = mx$ és $y = nx$; a tengelyeket metsző egyenes egyenlete $x = d$.

Az e egyenes metszéspontja az a , ill. b egyenessel:

$$A(d, md), \quad B(d, nd).$$

Az e -hez adjungált E pontot úgy nyerjük, hogy megszerkesztjük az A -ban a -ra emelt merőleges és B -ben b -re emelt merőleges metszéspontját (1. ábra).



1. ábra

E merőlegesek egyenlete

$$(1) \quad y - md = -\frac{1}{m}(x - d),$$

$$(2) \quad y - nd = -\frac{1}{n}(x - d).$$

A forgatás során α nem változik. E szög tangense az m és n iránytényezőkkel – mint ismeretes – a következőképpen fejezhető ki

$$(3) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{m - n}{1 + m \cdot n}.$$

(1), (2) és (3) a forgatással keletkező minden E pontra nézve fennáll, tehát ez az egyenletrendszer a keresett mértani hely paraméteres egyenletrendszere. Elvben (1)-ből kifejezhetnénk az m paramétert, (2)-ből az n -et és a két értéket (3)-ba helyettesítve, mindkettőt kiküszöböltük. Azonban így m -re és n -re másodfokú egyenlet adódik. Könnyebben célhoz jutunk, ha alkalmas átalakításokkal arra törekszünk, hogy az mn és $m - n$ értékeket x , y és d -vel kifejezzük.

Ha (1)-ből kivonjuk (2)-t, ismert átalakításokkal

$$(4) \quad mn = \frac{d - x}{d}$$

összefüggésre jutunk. Ha pedig (1)-et osztjuk n -nel, (2)-t m -mel és ezután vonjuk le (2)-t (1)-ből, átalakítások után nyerjük

$$(5) \quad m + n = \frac{y}{d}.$$

(4) és (5)-öt közvetlenül felhasználhatjuk, ha (3)-at – a nevezővel való átszorzás és négyzetreemelés után – így alakítjuk át:

$$(1 + mn)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha = (m - n)^2 = (m + n)^2 - 4mn.$$

(4)-et és (5)-öt behelyettesítve és d^2 -tel szorozva

$$(2d - x)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha = y^2 + 4dx - 4d^2.$$

Ez az egyenlet hiperbola egyenlete; könnyen hozható a hiperbola egyenletének ismert alakjára. Az

$$(6) \quad \left(x - 2d \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \right) \operatorname{tg}^2 \alpha - y^2 = 4d^2 \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}$$

alakból, ahol még

$$\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha},$$

leolvasható, hogy a hiperbola középpontja a pozitív x tengelyen, az origótól $\frac{2d}{\sin^2 \alpha}$ távolságra van; valós tengelyének, amely az x tengelyre esik, fél hossza $a = \frac{2d \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}$, fél képzetes tengelye pedig $b = \frac{2d}{\sin \alpha} = a \operatorname{tg} \alpha$. Ezekből a lineáris excentricitásra a középpont abszcisszájával egyenlő érték adódik, tehát a hiperbola egyik fókusza az origó.

Szeidl Béla (Bp. VIII., Apáczai Csere g. III. o. t.)

II. megoldás. Jelölés az I. megoldás szerint. Az a -ra és b -re A , ill. B pontban emelt merőlegesek annak a parabolának érintői, melynek fókusza az O pont, csúcse E az e egyenes. Eszerint az E pontokból az említett parabola α , ill. $(180^\circ - \alpha)$ szög alatt látszik.

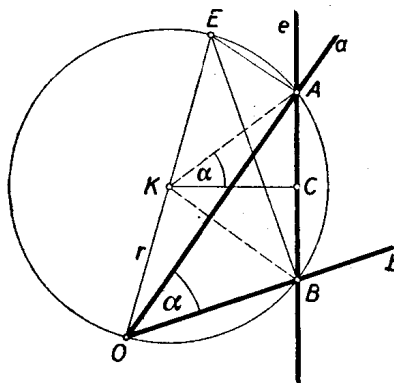
A 617. feladat (K. M. L. X. kötet, 1. szám) megoldásával bebizonyítottuk, hogy azon pontok mértani helye, melyekből egy parabola 45° -os, 135° -os szög alatt látszik, hiperbola. Az ott közölt II. megoldással (1955. januári szám, 25. old.) azonos utat követve, de 45° -os szög helyett általános α szöggel számolva, a mértani hely egyenleteként a

$$(7) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{y^2 - 2px'}}{2x' + p}$$

egyenletre jutunk, feltéve, hogy a parabola egyenlete $y^2 = 2px'$. Jelen esetben azonban a parabola egyenlete $y = -4d(x - d)$ és így $p = -2d$, $x' = x - d$. Ha ezen értékeket helyettesítjük (7)-be, akkor megkapjuk a (6) egyenletet.

Csiszár Imre (Bp. I., Petőfi g. III. o. t.)

III. megoldás. Az I. megoldás jelöléseit használva a szerkesztés alapján $OBAE$ húrnégyszög, OE a körülírt kör átmérője (miután A -ból és B -ből derékszög alatt látszik); a körülírt kör középpontja O E -re felező pontja: K . Rajzoljuk meg az α -hoz tartozó középponti szöget és az $AKB\Delta$ magasságvonalát, mely az e egyenest az AB húr felezőpontjában, C -ben metszi (2. ábra).



2. ábra

A K pont az O ponttól r távolságra van, az e egyenestől mért távolsága (a $CAK\Delta$ -ból) $KC = r \cos \alpha$. E két távolság aránya $\frac{1}{\cos \alpha}$ állandó és 1-nél nagyobb. Ezért a K pontok mértani helye hiperbola, melynek egyik fókusza O . (L. a III. osztályos gimnáziumi tankönyv 268. oldalát.) Miután pedig az E pontok a K pontokkal O -ra nézve perspektív helyzetben vannak, kétszeres távolságban, az E pontok mértani helye szintén hiperbola. Az O perspektív centrum ezen hiperbolának is fókusza.

Ha $\alpha = 90^\circ$, akkor a $KC = r \cos \alpha$ távolság 0-vá válik. Tehát a K pontok mértani helye maga az e egyenes, és így ebben az esetben az E pontok mértani helye az e -vel párhuzamos, O -tól kétszeres távolságban fekvő egyenes. (Ez egyébként kiolvasható az analitikus I. megoldásból is.)

Vigassy György (Bp. I., Petőfi g. IV. o. t.)