

Csak azzal az esettel foglalkozunk, ha a, b, c 0-tól különböző valós számok. Ellenkező esetben a feltételi egyenletek különböző, igen egyszerű egyenletekre vezetnek, amelyekben mind a három gyök valós.

A feltételi egyenletekből tehát (ha $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$)

$$(1) \quad b = \frac{a^2}{2} \quad \text{és így}$$

$$(2) \quad c = \frac{ab}{4} = \frac{a^3}{8}.$$

Ezeket az értékeket egyenletünkbe helyettesítve

$$x^3 + ax^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{8} = 0.$$

Ezen egyenlet bal oldalát átalakítva

$$\begin{aligned} \left(x^3 + \frac{a^3}{8}\right) + ax\left(x + \frac{a}{2}\right) &= \left(x + \frac{a}{2}\right) \left[\left(x^2 - \frac{a}{2}x + \frac{a^2}{4}\right) + ax\right] = \\ &= \left(x + \frac{a}{2}\right) \left(x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{a^2}{4}\right) = 0. \end{aligned}$$

Tehát vagy

$$(3) \quad x + \frac{a}{2} = 0,$$

vagy

$$(4) \quad x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{a^2}{4} = 0.$$

(3)-ból

$$x = -\frac{a}{2}.$$

A (4) alatti másodfokú egyenlet diszkriminánsa

$$D = \frac{a^2}{4} - a = -\frac{3}{4}a^2 < 0,$$

mert a^2 mindig pozitív. Tehát (4)-nek nem lehet valós gyöke.

Az első feltételi egyenletből $a^2 = 2b$. Ha feltesszük, hogy a és b egész szám, akkor a^2 és vele együtt a is páros (és következésképpen c is egész), és így egyenletünknek egyetlen valós gyöke

$$x = -\frac{a}{2}$$

egész.

Tarlaczk László (Szombathely, Nagy Lajos g. IV. o. t.)