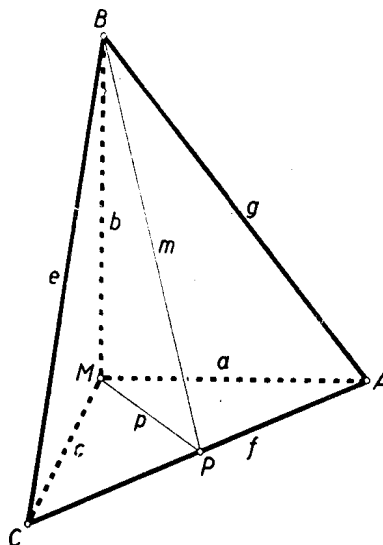


I. megoldás: A betűzést az ábra mutatja.



Jelöljük a gúla MA , MB , MC oldaléleit rendre a , b , c -vel, az alaplap éleit pedig rendre e , f , g -vel. Mivel a gúla mindegyik oldaléle merőleges a másik kettőre, azért mindegyik alapél az egyik oldalélre merőleges síkban fekszik, pl. az f alapél a b oldalélre merőleges $[ac]$ síkban van. Tehát lehet b -n át f -re merőleges síkot fektetni. Messe e sík f -et a P pontban, akkor $MP = p$ és $BP = m$ egyaránt merőleges f -re. Előbbi az AMC derékszögű háromszögnek az AC átfogóhoz tartozó magassága, utóbbi pedig az $ABC\triangle$ -ben az AC oldalhoz tartozó magasság.

Az ABC alaplap területének négyzete (alkalmazva a BMP és AMC derékszögű háromszögekre Pythagoras tételét)

$$t^2 = \left(\frac{fm}{2}\right)^2 = \frac{f^2 m^2}{4} = \frac{(a^2 + c^2)(b^2 + p^2)}{4} = \frac{a^2 b^2 + b^2 c^2 + f^2 p^2}{4}$$

De az $AMC\Delta$ kétszeres területe $fp = ac$, és így

$$t^2 = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}{4} = \left(\frac{ab}{2}\right)^2 + \left(\frac{bc}{2}\right)^2 + \left(\frac{ac}{2}\right)^2,$$

ami éppen feladatunk állítása.

Janky Béla (Miskolc, Villamosenergiaip. techn. I. o. t.)

Megjegyzés: Ugyanerre az eredményre jutunk, ha az ABC alaplap területét Heron-képlettel fejezzük ki, de a számítás ez esetben bonyolultabb.

II. megoldás: Ismeretes, hogy valamely t területű síkidomnak egy másik síkra való merőleges vetületének területe egyenlő $t \cos \varphi$ -vel, ahol φ a két sík hajlásszöge. (Lásd a gimnáziumok IV. osztályos tankönyvében – Tankönyvkiadó 1954 – a 77–79. oldalon, továbbá az ipari és mezőgazdasági technikumok IV. osztályos tankönyvében – Tankönyvkiadó 1955 – a 16–17. oldalon.)

Gúlánknak bármely oldallapja felfogható az alaplappnak merőleges vetületeként. Tehát az oldallapok területét rendre t_1 , t_2 , t_3 -mal jelölve

$$(1) \quad t_1 = t \cos \alpha, \quad t_2 = t \cos \beta, \quad t_3 = t \cos \gamma,$$

ahol α, β, γ jelenti a kérdéses oldallapoknak az alaplappal bezárt szögét.

Ha az (1) alatti három egyenletet rendre t_1 , t_2 , ill. t_3 -mal szorozzuk és azután összeadjuk, nyerjük

$$(2) \quad t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 = t(t_1 \cos \alpha + t_2 \cos \beta + t_3 \cos \gamma).$$

Vetítsük mind a három oldallapot merőlegesen a gúla alaplajjára, akkor e vetületek összege éppen az alaplaj, vagyis

$$t_1 \cos \alpha + t_2 \cos \beta + t_3 \cos \gamma = t.$$

Írjuk ezt (2)-ben a zárójel helyébe, nyerjük, hogy

$$t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 = t^2.$$

Székely Tamás (Bp. XVI., Corvin Mátyás g. CV. o. t.)