

Ha valamely esemény bekövetkezésének valószínűsége v , akkor annak valószínűsége, hogy n kísérlet közül pontosan k -szor, mégpedig az előírt n_1 -, n_2 -, $\dots$, n_k -adik kísérletre bekövetkezzék, a többi $n-k$ kísérletben pedig ne következzen be, nyilván $v^k(1-v)^{n-k}$. Ha nem írjuk elő a k helyet az n kísérlet sorában, vagyis az első n egész szám bármelyik k -ad osztályú kombinációja megfelel, akkor annak valószínűsége, hogy az esemény n kísérlet közül egyáltalában valamiképpen k -szor bekövetkezzék, és $(n-k)$ -szor ne következzen be:

$$V_{n/k} = \binom{n}{k} v^k (1-v)^{n-k}.$$

Feladatunkban $V_{998/99}$ -et és $V_{998/100}$ -at kell összehasonlítani, ha $v = 0,1$. Célszerű lesz ehhez a $\frac{V_{n/k}}{V_{n/k+1}}$ hányadost meghatározni.

$$\begin{aligned} \frac{V_{n/k}}{V_{n/k+1}} &= \frac{\binom{n}{k} v^k (1-v)^{n-k}}{\binom{n}{k+1} v^{k+1} (1-v)^{n-k-1}} = \\ &= \frac{n(n+1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k(k+1)(1-v)}{n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)v} = \\ &= \frac{(k+1)(1-v)}{(n-k)v}, \end{aligned}$$

tehát

$$\frac{V_{998/99}}{V_{998/100}} = \frac{100 \cdot 0,9}{899 \cdot 0,1} = \frac{900}{899} > 1,$$

és így

$$V_{998/99} > V_{998/100}.$$

Megjegyzés: Az eredmény első tekintetre meglepő, mert a nagy számok törvényét felületesen és helytelenül alkalmazva (amint azt sok megoldó megtette), úgy látszik, hogy 998 kísérlet esetén $(998 \cdot 0,1 =) 99,8$ közelebb van a 100-hoz, mint a 99-hez.

Nézzük meg, hogy k milyen értéke mellett lesz $V_{n/k} > V_{n/k+1}$.

A

$$\frac{V_{n/k}}{V_{n/k+1}} = \frac{(k+1)(1-v)}{(n-k)v} > 1$$

egyenlőtlenségből következik, hogy

$$k > (n+1)v - 1$$

esetén $V_{n/k} > V_{n/k+1}$, vagyis a jelen esetben

$$k > (998+1)0,1 - 1 = 98,9.$$

Tehát $k = 99$ a legkisebb szám, amelyre nézve már $V_{n/k} > V_{n/k+1}$.

Biczó Géza (Bp. II., Rákóczi g. IV. o. t.)