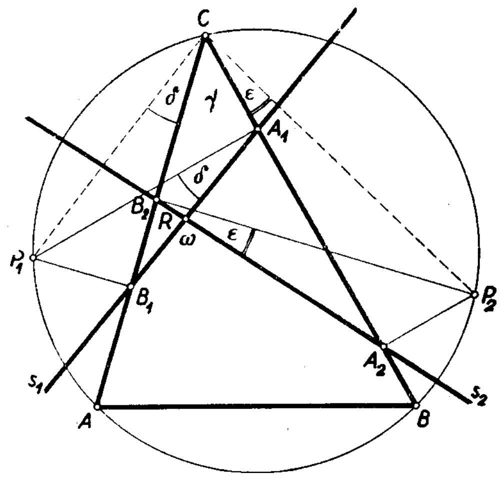
I. megoldás: A betűzést az 1. ábra mutatja.



1. ábra

Legyen a Simson-egyenesek szöge ω, a P_1P_2-höz tartozó kerületi szög φ. Ekkor

$$P_1CP_2\sphericalangle = \varphi = \delta + \gamma + \varepsilon \tag{1}$$

$P_1B_1A_1C$ a Thales-tétel alapján húrnégyszög, és így a δ-val jelölt egyíves szögek egyenlők.
Hasonlóképpen a $P_2A_2B_2C$ húrnégyszögben az ε-nal jelölt kétíves szögek egyenlők.
A CB_2RA_1 négyszögben a szögek összege:

$$\gamma + (90^\circ + \varepsilon) + \omega + (90^\circ + \delta) = 360^\circ,$$

amiből

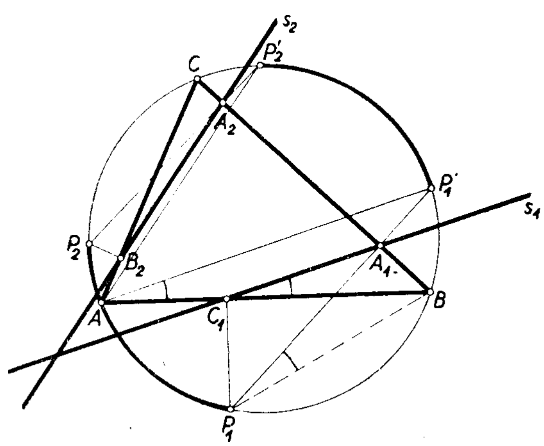
$$\gamma + \varepsilon + \delta + \omega = 180^\circ,$$

vagyis (1) figyelembevételével

$$\varphi = 180^\circ - \omega.$$

Benkő Bálint (Sárospatak, Rákóczi g. III. o. t.)

II. megoldás: A P_1 és P_2 pontokból a BC oldalra bocsátott merőlegesek messék a körülírt kört P_1', ill. P_2'-ben (2. ábra).



2. ábra

Nyilván $\overset{\frown}{P_1'P_2'} = \overset{\frown}{P_1P_2}$, tehát elég a $P_1AP_2\sphericalangle$-ről megmutatni, hogy egyenlő az s_1 és s_2 szögével. Ez így látható be:

$$BAP'\sphericalangle = BP_1P_1'\sphericalangle, \tag{1}$$

mint ugyanazon az íven nyugvó kerületi szögek. A $P_1C_1A_1B$ négyszög Thales tétele értelmében húrnégyszög, és így e négyszög köré írt körben

$$BC_1A_1\sphericalangle = BP_1A_1\sphericalangle \equiv BP_1P_1'\sphericalangle. \tag{2}$$

(1) és (2) egybevetéséből nyerjük, hogy

$$BAP_1'\sphericalangle = BC_1A_1\sphericalangle.$$

Mivel e két szögnek két szára egybeesik, továbbá A_1, és P_1' szükségképpen az AB oldalnak ugyanarra az oldalára esik, azért

$$AP_1' \parallel C_1A_1 = s_1.$$

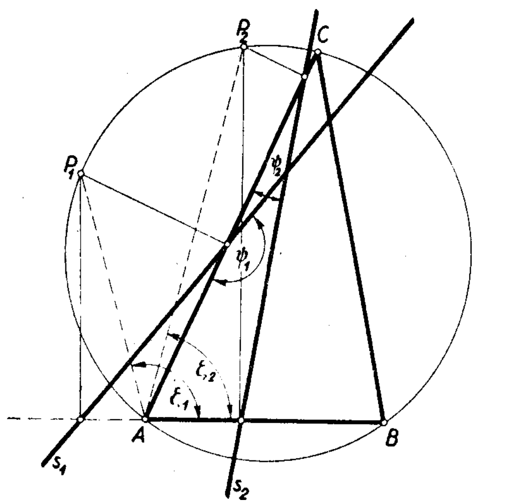
Teljesen ugyanígy kimutatható, hogy

$$AP_2' \parallel s_2,$$

amiből az állítás következik.

Bánhidy Kálmán (Debrecen Ref. g. III. o. t.)

III. megoldás: Egyszerű bizonyítást nyerünk, ha tekintjük az AB és AC oldalak alkotta Gönyei-féle $\Sigma(\alpha)$ rendszert. A betűzést a 3. ábra mutatja.



3. ábra

P_1 és s_1 valamint P_2 és s_2 adjungált elemek, és így

$$\zeta_1 + \psi_1 = 90^\circ, \qquad \zeta_2 + \psi_2 = 90^\circ.$$

A második egyenletet az elsőből kivonva nyerjük, hogy

$$\zeta_1 - \zeta_2 + \psi_1 - \psi_2 = 0,$$

vagyis

$$\zeta_1 - \zeta_2 = -(\psi_1 - \psi_2),$$

ami éppen állításunkat fejezi ki, mert $\zeta_1 - \zeta_2$ a $\overset{\frown}{P_1P_2}$ ívhez tartozó kerületi szög, $-(\psi_1 - \psi_2)$ pedig s_1, és s_2 szöge.

Zsombok Zoltán (Bp. IV., Könyves Kálmán g. III. o. t.)