

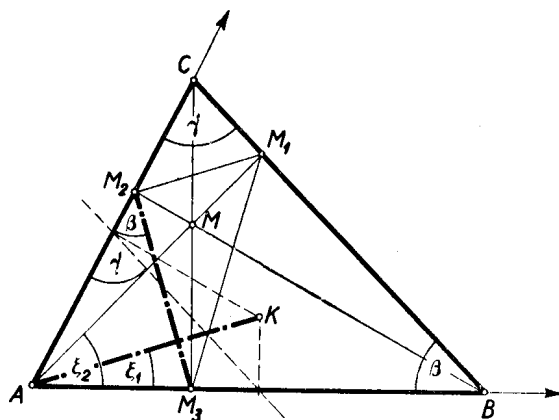
I. megoldás: Legyen az adott háromszög AB és AC oldala egy $\Sigma(\alpha)$ rendszer két tengelye. (A $\Sigma(a)$ rendszertől l. Gönyei A. cikkét a K. M. L. 1955. januári számában). Fel fogjuk írni egyrészt a háromszög köré írt kör K középpontja és adjungáltjára vonatkozó

$$(1) \quad \zeta + \psi = 90^\circ$$

összefüggést, majd felírjuk ugyanezt az összefüggést a háromszög M magassági pontjára és ennek adjungáltjára, mely a talpponti háromszög M_2M_3 oldala.

K pont adjungáltja a háromszög BC -vel párhuzamos középvonala, ezért (1) ebben az esetben azt adja, hogy (l. ábra)

$$(2) \quad \zeta_1 + \gamma = 90^\circ, \quad \text{vagyis} \quad \zeta_1 = 90^\circ - \gamma.$$



1. ábra

A magassági pontra és adjungáltjára az (1) szögösszefüggés így alakul:

$$\zeta_2 + \angle AM_2M_3 = 90^\circ,$$

de az AM_1B derékszögű háromszögből $\zeta_2 + \beta = 90^\circ$, így $\angle AM_2M_3 = \beta$, és következésképpen az $AM_2M_3\triangle$ -ből $\angle AM_3M_2 = \gamma$.

Viszont (2) szerint a $\angle KAM = \zeta_1 = 90^\circ - \gamma$, ebből következik, hogy

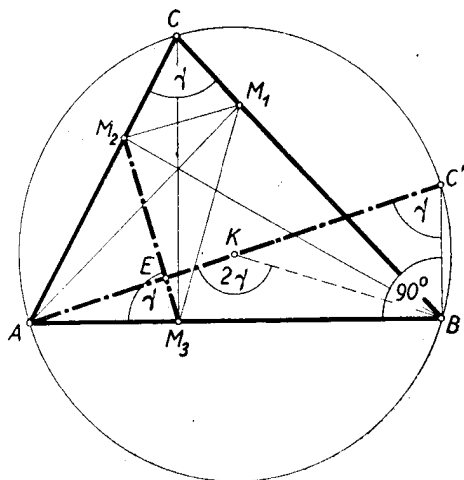
$$AK \perp M_2M_3.$$

Tompaszögű háromszög esetén a bizonyítás ugyanígy elvégezhető. Ha a háromszög derékszögű, akkor a talpponti háromszög az átfogóhoz tartozó magassággá fajul, és így az egyik oldaláról nem tehet beszélni.

Szabó Endre (Gyöngyös, Vak Bottyán g. IV. o. t.)

Természetesen a $\Sigma(a)$ rendszer felhasználása nélkül is könnyen bizonyítható a feladat állítása, amint azt az alábbi megoldások mutatják, melyek mind hegyes-, mind tompaszögű háromszög esetén egyaránt érvényesek.

II. megoldás: A betűzést a 2. ábra mutatja.



2. ábra

Thales tétele értelmében a BC fölé, mint átmérő fölé, rajzolt félkör átmegy az M_2 és M_3 pontokon, tehát BCM_2M_3 húrnegyszög, és így az M_2M_3A szög egyenlő a szemkölti belső szöggel, vagyis

$$M_2M_3A \sphericalangle = \gamma.$$

Másrészt, ha a körülírt körben A átellenes pontját C' -vel jelöljük, akkor a keletkezett ABC' háromszögben a Thales-tétel alapján az $ABC' \sphericalangle$ derékszög, a kerületi szögek tétele szerint pedig $AC'B \sphericalangle = \gamma$, és így

$$C'AB \sphericalangle = 90^\circ - \gamma.$$

AC' és M_2M_3 metszéspontját E -vel jelölve, az AEM_3 háromszög két szögének összege $\gamma + (90^\circ - \gamma) = 90^\circ$, és így a harmadik szög

$$AEM_3 \sphericalangle = 90^\circ,$$

ami bizonyítandó volt.

Szabados József (Bp. III, Árpád g. III. o. t.)

III. megoldás: Az $AKB \sphericalangle$ (2. ábra), mint középponti szög egyenlő 2γ -val, tehát a

$$KAB \sphericalangle \equiv EAM_3 \sphericalangle = \frac{180^\circ - 2\gamma}{2} = 90^\circ - \gamma.$$

Mint ismeretes, a talpponti háromszög oldalai által lemetezett háromszögek hasonlóak az eredeti háromszöghöz (a szögek egyenlősége már az I. osztályos tankönyvben megtalálható), vagyis

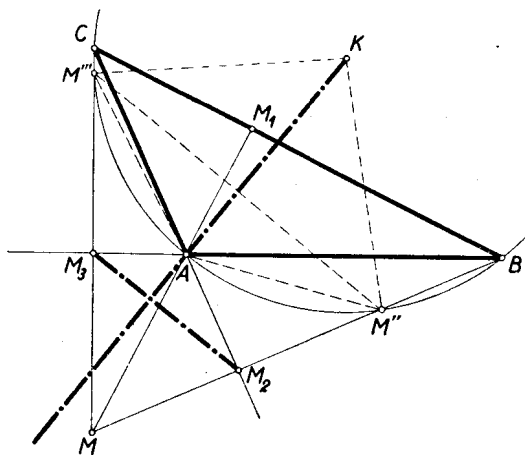
$$AM_3M_2 \sphericalangle = \gamma,$$

tehát az $AEM_2 \triangle$ harmadik szöge 90° .

Makkai Mihály (Bp. V., Eötvös g. II. o. t.)

IV. megoldás: Ismeretes tétel, hogy az M pont bármely háromszögoldalra vonatkozó tükörképe rajta van a körülírt körön. Tehát M'' és M''' (3. ábra) a körülírt körön van és $M_2M = M_2M''$, $M_3M = M_3M'''$ miatt

$$(1) \quad M''M''' \parallel M_2M_3.$$



3. ábra

Elég tehát azt megmutatni, hogy $M''M'''$ merőleges az AK egyenesre. Mivel előbbi szakasz húrja a K középpontú körülírt körnek, az állítás következik abból, ha megmutatjuk, hogy A felezi a kör $M''M'''$ ívét. Mivel pedig az AM'' és AM''' távolságok az AM távolság tükörképei, s így a fölöttük levő ívek is egyenlők, tehát A valóban felezi az $M''M'''$ ívet, ebből pedig következik a bizonyítandó állítás.

Pintér László (Celldömölk, Gábor Áron g. IV. o. t.)