

Jelöljük $f(x)$ -et y -nal, $\varphi(z)$ -t pedig v -vel. Az (1) függvény képe egy görbe vonal (negyedfokú parabola), abban a koordináta-rendszerben, melynek tengelyei x és y . Feladatunk *ugyanezen* görbe egyenletét (2) alakban előállítani új, z, v koordináta-rendszerben, illetőleg megadni a (2) alakra való transzformálhatóság feltételét. (Megjegyezzük, hogy csak lineáris, azaz elsőfokú, transzformációt keresünk.)

Céljainknak csak oly transzformáció felelhet meg, mely az

$$(3) \quad x = k \text{ (konstans)}$$

egyeneseket a

$$(4) \quad z = k^* \text{ (konstans)}$$

egyenesbe viszi át. Ugyanis $y = f(x)$ az x -nek egyértékű függvénye (x bármely értékéhez egy és csakis egy y érték tartozik), hasonlóképpen $v = \varphi(z)$ a z -nek egyértékű függvénye. Márpedig ha a $z = k^*$ egyenes megfelelője az eredeti (x, y) koordináta-rendszerben nem $x = k$. alakú egyenes, hanem bármely más, pl.

$$(5) \quad y = mx + k$$

alakú egyenes, akkor (1) és (5) négy metszéspontjának a transzformálás után $z = k^*$ -hoz tartozó négy függvényérték felelne meg, tehát a transzformált függvény nem lehetne v -nek (2) alakú egyértékű függvénye.

A céljainknak megfelelő transzformáció új ordináta-tengelye v , tehát y -nal párhuzamos, eszerint x és z között a következő összefüggés áll fenn

$$(6) \quad x = z + \lambda$$

ahol λ konstans. Az új rendszer abszcissa-tengelye az x tengellyel egybeeshet, tehát

$$(7) \quad v = y$$

mert az abszcissa tengely párhuzamos eltolásával (2)-ben csak a konstans tag értéke változik meg, márpedig ez (2) alakját nem befolyásolja.

(Az egyszerű párhuzamos eltoláson kívül számításba jöhetne még az a transzformáció, melynél a koordináta-rendszert párhuzamosan eltoljuk, és *utána még 180°-kal el is forgatjuk*. Az elforgatás mindkét koordináta előjelét megváltoztatja, tehát (1)-et oly negyedfokú függvénybe viszi át, amelynek negyedfokú tagja negatív előjelű, tehát célunknak nem felel meg.)

Ezek után vizsgáljuk meg, hogy az egyetlen fajta transzformáció, mely céljainknak megfelelhet, az ordináta-tengelynek (6)-tal és (7)-tel adott párhuzamos eltolása, λ mely értéke mellett viszi át az (1) függvényt (2) alakúba. (6)-ot és (7)-et behelyettesítve (1)-be, nyerjük

$$(8) \quad v = \varphi(z) = (z + \lambda)^4 + a(z + \lambda)^3 + b(z + \lambda)^2 + c(z + \lambda) + d$$

Elvégezve a hatványozásokat és rendezve:

$$(8^*) \quad v = z^4 + (4\lambda + a)z^3 + (6\lambda^2 + 3\lambda a + b)z^2 + (4\lambda^3 + 3\lambda^2 a + 2\lambda b + c)z + \lambda^4 + a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d$$

Ez a kifejezés akkor és csak akkor (2) alakú, ha z páratlan kitevőinek együtthatója 0, azaz

$$(9) \quad 4\lambda + a = 0;$$

$$\text{innen } \lambda = -\frac{a}{4},$$

és

$$(10) \quad 4\lambda^3 + 3\lambda^2 a + 2\lambda b + c = 0.$$

λ -nak (9)-ből nyert értékét behelyettesítve (10)-be, nyerjük:

$$(11) \quad a^3 - 4ab + 8c = 0.$$

Tehát annak, hogy (1) felírható legyen (2) alakban, szükséges és elégséges feltétele, hogy (1) együtthatói kielégítsék a (11) összefüggést.

Mivel $\varphi(-z) = \varphi(z)$, azért a φ függvény görbéje a v tengelyre szimmetrikus, vagyis a (11) feltétel teljesülése más szóval azt jelenti, hogy az $f(x)$ függvény képének van egy – az y tengellyel párhuzamos – szimmetria tengelye.

Rázga Tamás (Bp., II., Rákóczi g. III. o. t.)