

I. megoldás: Egyenletrendszerünk így írható:

$$(1) \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{13}{3},$$

$$(2) \quad x + y + z = \frac{13}{3},$$

$$(3) \quad xyz = 1.$$

(1)-ből és (3)-ból következik, hogy a három ismeretlen egyike sem lehet 0, szorozhatjuk tehát (1)-et xyz -vel, és (2)-t x -szel. Nyerjük, hogy

$$(4) \quad yz + xz + xy = \frac{13}{3}xyz = \frac{13}{3},$$

$$(5) \quad x^2 + xy + xz = \frac{13}{3}x.$$

(5)-ből kivonva (4)-et

$$x^2 - yz = \frac{13}{3}x - \frac{13}{3}.$$

(3) alapján yz helyébe $\frac{1}{x}$ -et írva, x -szel szorozva és rendezve

$$x^3 - \frac{13}{3}x^2 + \frac{13}{3}x - 1 = 0.$$

A baloldal átalakítható a következőképpen:

$$\begin{aligned} x^3 - 1 - \frac{13}{3}x(x-1) &= (x-1)(x^2 + x + 1) - \frac{13}{3}x(x-1) = \\ &= (x-1) \left(x^2 - \frac{10}{3}x + 1 \right) = 0, \end{aligned}$$

amiből

$$x_1 = 1,$$

a másodfokú tényező szolgáltatja egyenlet két gyöke pedig

$$x_2 = 3, \quad x_3 = \frac{1}{3}.$$

x ezen értékeit (2) és (3)-ba helyettesítve, nyerjük a teljes gyökrendszert:

$x = 1$	1	3	3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$y = 3$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	1	3
$z = \frac{1}{3}$	3	$\frac{1}{3}$	1	3	1

Bartók Károly (Székesfehérvár, József Attila g. II. o. t.)

II. megoldás: A harmadfokú egyenlet gyöktényezős alakja

$$a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0.$$

Ha $a = 1$, akkor

$$x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3 = 0.$$

A (2), (3) és (4) egyenleteket figyelembe véve, egyenletrendszerünk 3 gyöke tehát megegyezik a következő harmadfokú egyenlet 3 gyökével.

$$x^3 - \frac{13}{3}x + \frac{13}{3}x - 1 = 0.$$

A nyert 3 gyök $3! = 6$ permutációja adja egyenletrendszerünk 6 gyökhármasát. ásmallskip

Vigassy György (Budapest, I., Petőfi g. IV. o. t.)