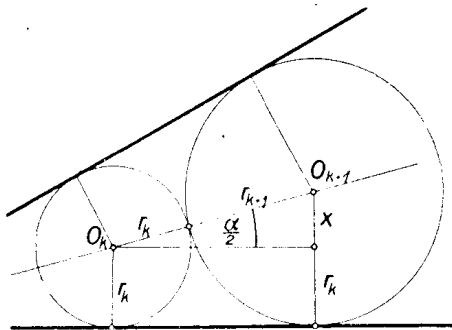


I. megoldás: Legyenek a körök sugarai rendre $r_1, r_2, \dots, r_k, r_{k+1}, \dots, r_n$.

r_k ismeretében a rákövetkező kör r_{k+1} sugara kiszámítható. A betűzést az 1. ábra mutatja.



1. ábra

$$\begin{aligned} r_{k+1} &= r_k + x = r_k + O_k O_{k+1} \sin \frac{\alpha}{2} = \\ &= r_k + (r_k + r_{k+1}) \sin \frac{\alpha}{2}, \end{aligned}$$

vagyis

$$r_{k+1} - r_{k+1} \sin \frac{\alpha}{2} = r_k + r_k \sin \frac{\alpha}{2},$$

és így

$$r_{k+1} = r_k \frac{1 + \sin \frac{\alpha}{2}}{1 - \sin \frac{\alpha}{2}}, \quad \text{ahol } k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Az $r_1, r_2, \dots, r_n$ sugarak tehát mértani sorozatot alkotnak, amelynek hányadosa $q = \frac{1 + \sin \frac{\alpha}{2}}{1 - \sin \frac{\alpha}{2}}$.

A keresett terület tehát

$$T = t_1 + t_2 + \dots + t_n = \pi(r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2).$$

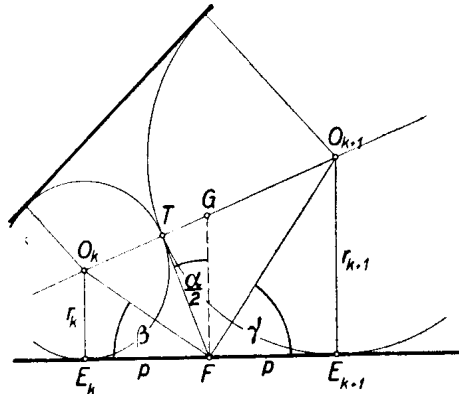
Az előbbiek alapján a zárójelben álló kifejezés olyan mértani sorozat, amelynek első tagja r_1^2 és hányadosa $\left(\frac{1 + \sin \frac{\alpha}{2}}{1 - \sin \frac{\alpha}{2}} \right)^2$.

A mértani sorozat összegképletét felhasználva

$$T = r_1^2 \pi \frac{\left(\frac{1 + \sin \frac{\alpha}{2}}{1 - \sin \frac{\alpha}{2}} \right)^{2n} - 1}{\left(\frac{1 + \sin \frac{\alpha}{2}}{1 - \sin \frac{\alpha}{2}} \right)^2 - 1}.$$

Kismarty Loránd (Pannonhalma, Bencés g. I. o. t.)

II. megoldás: Az $\frac{r_{k+1}}{r_k} = q$, n -től független, állandó viszonyszám másképpen is meghatározható. A két szomszédos kör közös T érintőpontjában megrajzolt közös érintő messe a szög egyik szárát F -ben. A betűzést a 2. ábra mutatja.



2. ábra

Az F -ben a szögszárra emelt merőlegesnek a centrális egyenessel való metszéspontja legyen G . A TFG szög, mint merőleges szárú szög egyenlő $\frac{\alpha}{2}$ -vel. A TFE_k szög, ill. TFE_{k+1} szögfelezőjének az E_kE_{k+1} szögszárral bezárt szögét β -val, illetőleg γ -val jelölve, nyilván

$$\beta = \frac{90^\circ - \frac{\alpha}{2}}{2} = 45^\circ - \frac{\alpha}{4} \quad \text{és} \quad \gamma = \frac{90^\circ + \frac{\alpha}{2}}{2} = 45^\circ + \frac{\alpha}{4}.$$

Legyen $FT = FE_k = FE_{k+1} = p$, akkor

$$r_k = FE_k \cdot \operatorname{tg} \beta = p \cdot \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\alpha}{4} \right),$$

$$r_{k+1} = FE_{k+1} \cdot \operatorname{tg} \gamma = p \cdot \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\alpha}{4} \right),$$

és így

$$\frac{r_{k+1}}{r_k} = q = \frac{\operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\alpha}{4} \right)}{\operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\alpha}{4} \right)}.$$

q ezen alakjával a területek összege

$$T = r_1^2 \pi \frac{\frac{\operatorname{tg}^{2n} \left(45^\circ + \frac{\alpha}{4} \right)}{\operatorname{tg}^{2n} \left(45^\circ - \frac{\alpha}{4} \right)} - 1}{\frac{\operatorname{tg}^2 \left(45^\circ + \frac{\alpha}{4} \right)}{\operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{4} \right)} - 1} =$$

$$= r_1^2 \pi \frac{\operatorname{tg}^{2n} \left(45^\circ + \frac{\alpha}{4} \right) - \operatorname{tg}^{2n} \left(45^\circ - \frac{\alpha}{4} \right)}{\operatorname{tg}^{2(n-1)} \left(45^\circ - \frac{\alpha}{4} \right) \left[\operatorname{tg}^2 \left(45^\circ + \frac{\alpha}{4} \right) - \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{4} \right) \right]}$$

alakban adódik.

Bausz Imre (Sopron, Széchenyi g. IV. o. t.)

Megjegyzés: A q utóbbi értékét az I. megoldásban nyert értékből közvetlenül is megkaphatjuk, ha az $1 + \sin \frac{\alpha}{2} =$

$$\sin 90^\circ + \sin \frac{\alpha}{2} = 2 \sin \frac{90^\circ + \frac{\alpha}{2}}{2} \cos \frac{90^\circ - \frac{\alpha}{2}}{2} = 2 \sin \left(45^\circ + \frac{\alpha}{4} \right) \cos \left(45^\circ - \frac{\alpha}{4} \right) \quad \text{és} \quad 1 - \sin \frac{\alpha}{2} = 2 \cos \left(45^\circ + \frac{\alpha}{4} \right) \sin \left(45^\circ - \frac{\alpha}{4} \right)$$

helyettesítést végezzük el.