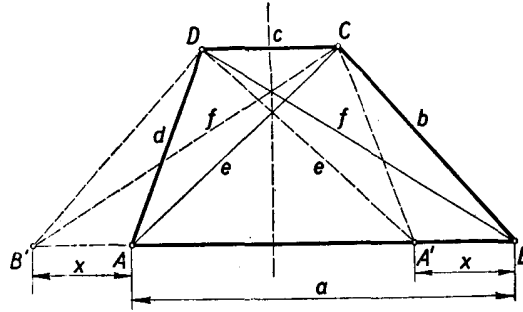


E feladat igen termékenynek bizonyult. Nagyon sokféle megoldás érkezett be. Legtöbbször a cosinus-tételt használták fel a megoldók (többféleképpen is), de több másfajta megoldás között szerepelt az $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4g^2$ összefüggés, ahol g az átlók felezőpontjainak egymástól való távolsága, valamint a súlyvonal hosszát megadó azonosság $\left(s_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 + a^2}{4}, \text{ lásd 510. sz. feladatot, VI. köt. 88. old. 1953. nov.}\right)$ is. A sokféle megoldásból az alábbi hármat választottuk ki, mint a legegyszerűbbeket és a legfrappánsabbakat. Ezek közül a legegyszerűbb a tétel általánosítását is lehetővé teszi.

I. megoldás: A betűzést az 1. ábra mutatja.



1. ábra

Az egyik párhuzamos (pl. a $CD = c$) oldalt merőlegesen felező egyenesre tükrözzük az AD és BC szárakat, nyerjük az $AA'CD$, ill. $B'BCD$ egyenlőszárú trapézeket.

$$AA' = AB - A'B = a - x,$$

$$B'B = AB + B'A = a + x.$$

Ezen egyenlőszárú trapézekre, mint húrnégyszögekre, alkalmazva Ptolemaios tételét

$$(1) \quad e^2 = d^2 + c(a - x),$$

$$(2) \quad f^2 = b^2 + c(a + x).$$

(1) és (2) összege

$$e^2 + f^2 = b^2 + d^2 + 2ac$$

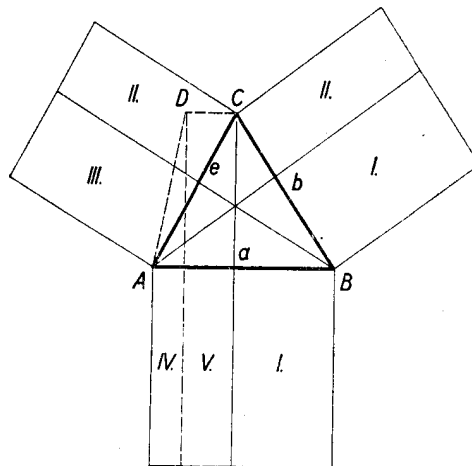
szolgáltatja a bebizonyítandó tételünket.

Dancs Mária (Bp. II., Hámán Katalin lg. IV. o. t.)

Szeidl Béla (Bp. VIII., Apáczai Csere g. III. o. t.)

II. megoldás: Ismeretes, hogy egy csúcsból kiinduló két háromszögoldal bármelyikéből és a második oldalnak az előbbi oldalon levő merőleges vetületéből alkotott egy-egy téglalap területe egyenlő ($b \cdot c \cos \alpha = c \cdot b \cos \alpha$). Ez igaz akár hegyes-, akár tompa-, akár derékszöget zár be a két oldal. (Utóbbi esetben mindkét téglalap területe külön-külön 0.) Ilyen módon bármely háromszögnek mind a három csúcspontjánál keletkezik 2-2 ilyen egyenlő területű téglalap.

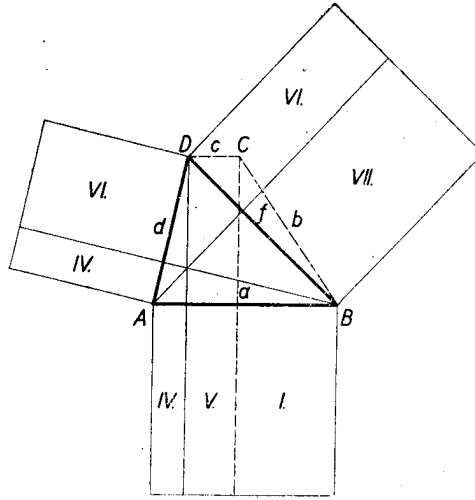
Alkalmazzuk e tételt $ABCD$ trapézünk ABC (2. ábra) és ABD (3. ábra) háromszögére. Mindkét ábrában az egyenlő területű téglalapokat ugyanazzal a római számmal jelöltük. $III = IV + V$ és $VII = I + V$.



2. ábra

A 2. ábrán az előbbiek alapján

$$e^2 = \text{II} + \text{III} = \text{II} + \text{IV} + \text{V}, \quad \text{és} \quad b^2 = \text{I} + \text{II}.$$



3. ábra

A 3. ábrán

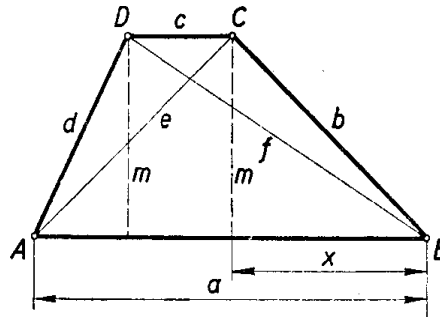
$$f^2 = \text{VI} + \text{VII} = \text{VI} + \text{I} + \text{V}, \quad \text{és} \quad d^2 = \text{IV} + \text{VI}.$$

Tehát

$$e^2 + f^2 = (\text{I} + \text{II}) + (\text{IV} + \text{VI}) + 2 \cdot \text{V} = b^2 + d^2 + 2ac.$$

Pesti András (Bp. XI., József A. g. III. o. t.)

III. Megoldás: Pythagoras-tétele is elegendő tételünk bizonyításához, sőt általánosításához is. Húzzuk meg a C és D pontokból a trapéz m magasságát.



4. ábra

A betűzést a 4. ábra mutatja.

$$(3) \quad e^2 = m^2 + (a-x)^2 = m^2 + a^2 - 2ax + x^2,$$

$$(4) \quad f^2 = m^2 + (c+x)^2 = m^2 + c^2 + 2cx + x^2,$$

$$(5) \quad b^2 = m^2 + x^2,$$

$$(6) \quad d^2 = m^2 + (a-c-x)^2 = m^2 + a^2 - 2ac + c^2 - 2ax + 2cx + x^2.$$

Tehát (3) és (4) összege

$$e^2 + f^2 = (m^2 + x^2) + (m^2 + a^2 + c^2 - 2ax + 2cx + x^2).$$

A jobboldalon az első zárójelben levő kifejezés értéke (5) alapján b^2 , a második zárójelben levő kifejezés értéke (6) alapján $d^2 + 2ac$, és így

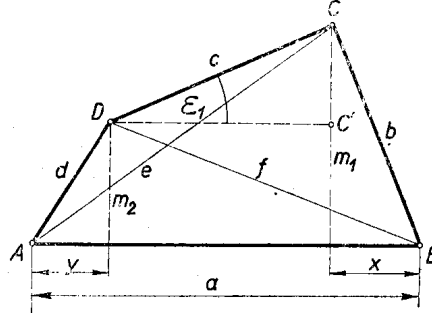
$$e^2 + f^2 = b^2 + d^2 + 2ac.$$

Megjegyzés: Megmutatjuk, hogy általános négyszögben

$$e^2 + f^2 = b^2 + d^2 + 2ac \cos \varepsilon_1 = a^2 + c^2 + 2bd \cos \varepsilon_2,$$

ahol ε_1 az a és c , ε_2 a b és d oldalak által bezárt szög. (Jelen feladatunk állítása ezen általánosabb tételnek speciális esete, midőn $\varepsilon_1 = 0$.)

A bizonyítás az előbbihez hasonló.



5. ábra

A betűzést az 5. ábra mutatja.

$$(7) \quad m_1 = b^2 - x^2 = e^2 - (a - x)^2$$

$$(8) \quad m_2 = d^2 - y^2 = f^2 - (a - y)^2$$

(7)-ből

$$(7') \quad 2ax = a^2 + b^2 - e^2,$$

(8)-ből

$$(8') \quad 2ay = a^2 + d^2 - f^2.$$

(7') és (8') összege

$$2a(x + y) = 2a^2 + b^2 + d^2 - e^2 - f^2,$$

amiből

$$e^2 + f^2 = b^2 + d^2 + 2a(a - x - y),$$

de $a - x - y = DC' = c \cos \varepsilon_1$, és így

$$e^2 + f^2 = b^2 + d^2 + 2ac \cos \varepsilon_1.$$

Hurkolt négyszög esetén ε_1 helyébe annak kiegészítő szöge $180 - \varepsilon_1$ lép. Hurkolt trapéz esetén, $\cos 180^\circ = -1$ miatt,

$$e^2 + f^2 = b^2 + d^2 - 2ac.$$

Rázga Tamás (Bp. II., Rákóczi g. III. o. t.)