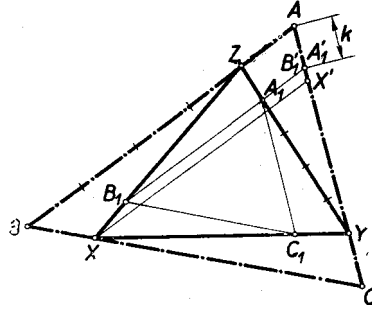


I. megoldás: Képzeljük a feladatot megoldottnak. A betűzést az 1. ábra mutatja.



1. ábra

Osszuk fel az $XYZ\triangle$ oldalait az A_1, B_1, C_1 pontokkal $\frac{A_1Y}{A_1Z} = \frac{B_1Z}{B_1X} = \frac{C_1X}{C_1Y} = \frac{1}{\lambda}$ arányban. Be fogjuk bizonyítani, hogy az $A_1B_1C_1\triangle$ oldalai rendre párhuzamosak az $ABC\triangle$ oldaljaival.

Húzzuk az X, A_1 és B_1 pontokon keresztül párhuzamosokat az AB oldallal, és messék ezek a párhuzamosok az AC oldalt rendre az X', A'_1, B'_1 pontokban.

$$\frac{X'C}{X'A} = \frac{XC}{XB} = \frac{1}{\lambda} = \frac{YA}{YC}.$$

Ebből következik, hogy

$$(1) \quad AX' = YC = \lambda \cdot YA.$$

Jelöljük az egyszerűség kedvéért az A'_1A távolságot k -val. ($AA'_1 = -k$.)

$$(2) \quad \frac{A'_1Y}{k} = \frac{A_1Y}{A_1Z} = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{amiből} \quad A'_1Y = \frac{k}{\lambda}$$

(1) és (2) figyelembevételével

$$\begin{aligned} \frac{A'_1A}{A'_1X'} &= \frac{k}{AX' - AA'_1} = \frac{k}{AX' + k} = \frac{k}{\lambda \cdot YA + k} = \frac{k}{\lambda(YA'_1 + A'_1A) + k} = \\ &= \frac{k}{\lambda \left(-\frac{k}{\lambda} + k \right) + k} = \frac{k}{-k + \lambda k + k} = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

De ugyanilyen arányban osztja a B'_1 pont is a AX' távolságot. Ugyanis

$$\frac{B'_1A}{B'_1X'} = \frac{B_1Z}{B_1X} = \frac{1}{\lambda}.$$

Tehát

$$A'_1 \equiv B'_1,$$

vagyis tényleg

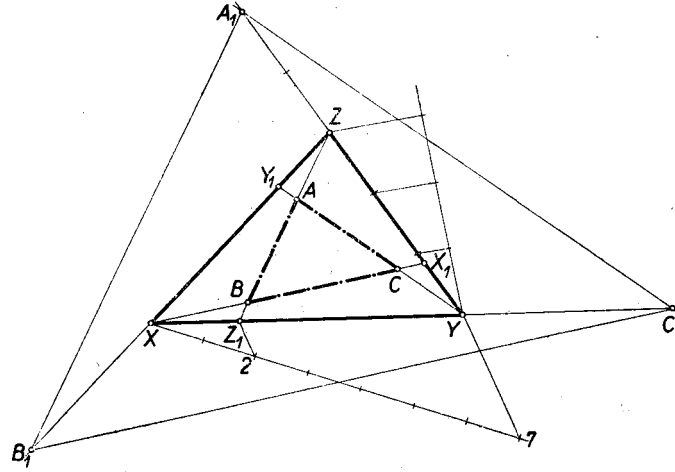
$$A_1B_1 \parallel AB.$$

Eszerint a szerkesztés menete: Megszerkesztjük az $XYZ\triangle$ oldalain az A_1, B_1, C_1 pontokat úgy, hogy

$$\frac{A_1Y}{A_1Z} = \frac{B_1Z}{B_1X} = \frac{C_1X}{C_1Y} = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{és a } Z, X, Y$$

pontokon át rendre párhuzamosokat húzunk az $A_1B_1C_1\triangle$ oldaljaival.

$$\begin{aligned} \lambda = -\frac{1}{4} \quad \text{esetén} \quad \frac{1}{\lambda} &= -4 \quad (1. \text{ ábra}) \\ \lambda = \frac{2}{5} \quad \text{esetén} \quad \frac{1}{\lambda} &= \frac{5}{2} \quad (2. \text{ ábra}). \end{aligned}$$



2. ábra

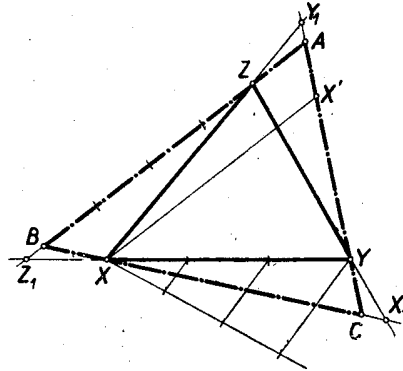
Speciális esetek:

$\lambda = 0$ esetén $A_1 \equiv Z$, $B_1 \equiv X$, $C_1 \equiv Y$, és így $A \equiv Z$, $B \equiv X$, $C \equiv Y$.

$\lambda = -1$ esetén $\frac{1}{\lambda} = -1$, és így az A_1, B_1, C_1 pontok az $XYZ\Delta$ oldalainak felezőpontjai, tehát az $A_1B_1C_1\Delta$ oldalai az $XYZ\Delta$ középvonalai, vagyis $AB \parallel XY$, $BC \parallel YZ$, $CA \parallel ZX$. (Triviális eset, midőn X, Y, Z az $ABC\Delta$ oldalainak felezőpontjai.)

$\lambda = 1$ esetén $\frac{1}{\lambda}$ is egyenlő az egységgel, és szerkesztésünk csődöt mond, mert az A_1, B_1, C_1 pontok nincsenek a végesben. Ez esetben tulajdonképpen a sík bármely P pontja tekinthető egy ponttá fajuló megoldásnak ($A \equiv B \equiv C \equiv P$).

II. megoldás: Képzeljük a feladatot megoldottnak. A betűzést a 3. ábra mutatja.



3. ábra

Jelöljük az AB és XY egyenesek metszéspontját Z_1 -gyel. Az X ponton keresztül AB -vel párhuzamos egyenes messe az AC oldalt X' -ben (3. ábra).

$$\begin{aligned} \frac{BC}{BX} &= \frac{BX + XC}{BX} = 1 - \frac{XC}{XB} = \\ &= 1 - \frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda - 1}{\lambda} = \frac{AC}{AX'}, \end{aligned}$$

amiből

$$(1) \quad AX' = \frac{\lambda \cdot AC}{\lambda - 1} = -\frac{\lambda \cdot AC}{1 - \lambda}$$

(Végesben fekvő osztópont esetén $\lambda \neq 1$, vagyis $\lambda - 1 \neq 0$).

$$\frac{CA}{CY} = \frac{CY + YA}{CY} = 1 - \frac{YA}{YC} = 1 - \frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda - 1}{\lambda},$$

ahonnan

$$(2) \quad CY = \frac{\lambda \cdot CA}{\lambda - 1} = \frac{\lambda \cdot AC}{1 - \lambda}.$$

(2) felhasználásával

$$(3) \quad AY = AC + CY = AC + \frac{\lambda \cdot AC}{1 - \lambda} = \frac{AC - \lambda \cdot AC + \lambda \cdot AC}{1 - \lambda} = \frac{AC}{1 - \lambda}.$$

(1) és (3) figyelembevételével

$$\frac{Z_1X}{Z_1Y} = \frac{AX'}{AY} = \frac{-\frac{\lambda \cdot AC}{1 - \lambda}}{\frac{AC}{1 - \lambda}} = -\lambda.$$

Tehát a szerkesztés menete: Megszerkesztjük $XYZ\triangle$ oldalain rendre a Z_1, X_1, Y_1 pontokat úgy, hogy $\frac{Z_1X}{Z_1Y} = \frac{X_1Y}{X_1Z} = \frac{Y_1Z}{Y_1X} = -\lambda$; a ZZ_1, XX_1, YY_1 egyenesek rendre az $ABC\triangle$ oldalainak hordozói.

$$\lambda = -\frac{1}{4} \text{ esetén } -\lambda = \frac{1}{4} \quad (3. \text{ ábra}),$$

$$\lambda = \frac{2}{5} \text{ esetén } -\lambda = -\frac{2}{5} \quad (2. \text{ ábra}).$$

Speciális esetek:

$\lambda = 0$ esetén $-\lambda$ is egyenlő nullával, vagyis $Z_1 \equiv X, X_1 \equiv Y$ és $Y_1 \equiv Z$ és így $A \equiv Z, B \equiv X, C \equiv Y$.

Ha $\lambda = -1$, akkor $-\lambda = 1$, vagyis $ZZ_1 \parallel XY, XX_1 \parallel YZ, YY_1 \parallel ZX$. (Triviális eset, midőn az X, Y, Z pontok felezik az $ABC\triangle$ oldalait.)

$\lambda = 1$ esetén $-\lambda = -1$, vagyis az XX_1, YY_1, ZZ_1 egyenesek az $XYZ\triangle$ súlyvonalai, és így az ABC – mint határeset – az $XYZ\triangle$ súlypontjává fajul. ($A \equiv B \equiv C \equiv S$. – Lásd I. megoldást.)

Megjegyzés: Egy megoldó sem dolgozott irányított távolságokkal, és senki sem adott általános érvényű, egységesen az osztóviszonnyal kifejezett megoldást.