

I. megoldás: A P függvénynek az $x = a, b, c$ helyeken nincs behelyettesítési értéke.

$$Q = (a - b)(x - a)(x - b) + (b - c)(x - b)(x - c) + (c - a)(x - c)(x - a)$$

függvény mindenütt értelmezett, látszólag másodfokú polinom, melynek értéke az $x = a, b, c$ helyek kivételével minden x -re megegyezik a P függvény értékével.

Tovább bontva tagokra

$$\begin{aligned} Q &= (a - b)(x^2 - ax - bx + ab) + (b - c)(x^2 - bx - cx + bc) + \\ &\quad + (c - a)(x^2 - cx - ax + ac) = (a - b + b - c + c - a)x^2 - \\ &\quad - [(a - b)(a + b) + (b - c)(b + c) + (c - a)(c + a)]x + (a - b)ab + \\ &\quad + (b - c)bc + (c - a)ac = -(a^2 - b^2 + b^2 - c^2 + c^2 - a^2)x + \\ &\quad + (a^2b - ab^2 + b^2c - bc^2 + ac^2 - a^2c) = a^2(b - c) + bc(b - c) - a(b^2 - c^2) = \\ &\quad = (b - c)(a^2 + bc - ab - ac)(b - c)[a(a - b) - c(a - b)] = \\ &\quad = (b - c)(a - b)(a - c) = (b - a)(a - c)(c - b). \end{aligned}$$

Tehát a Q függvény x -től független állandó és így – az előbbieken alapján – P értéke is mindenütt, ahol értelmezve van (tehát az $x = a, b, c$ kivételével) a Q állandó.

Beliczky Géza (Celldömölk, Gábor Áron g. IV. o. t.)

II. megoldás: Bevezetve a $p = x - a, q = x - b, r = x - c$ jelöléseket, ha $x \neq a, x \neq b, x \neq c$, akkor

$$(1) \quad P = pqr \left(\frac{q-p}{r} + \frac{r-q}{p} + \frac{p-r}{q} \right) = pq(q-p) + qr(r-q) + pr(p-r)$$

De

$$p - r = -(q - p) - (r - q),$$

amely értéket (1)-be helyettesítve

$$\begin{aligned} P &= pq(q-p) + qr(r-q) - pr(q-p) - pr(r-q) = \\ &= (q-p)(pq-pr) - (q-r)(qr-pr) = (q-p)(q-r)p - (q-r)(q-p)r = \\ &= (q-p)(q-r)(p-r) = (p-q)(r-p)(q-r) = (b-a)(a-c)(c-b). \end{aligned}$$

Szlanka Imre (Aszód, Petőfi g. IV. o. t.)

III. megoldás: Kiszámítva $Q(x)$ értékét az a, b, c helyeken, nyerjük közvetlenül behelyettesítés útján, hogy

$$(1) \quad Q(a) = Q(b) = Q(c) = (a - b)(b - c)(a - c) = (b - a)(a - c)(c - b)$$

Ha egy másodfokú egész függvény értéke három különböző helyen megegyezik, akkor a függvény állandó. Tehát Q konstans, és értéke az (1) alatti érték. Mint láttuk, ez egyben P helyettesítési értéke is, ha $x \neq a, b, c$.

Makkai Mihály (Bp. V., Eötvös g. II. o. t.)